

SOLUCIONARIO DEMIDOVICH

TOMO III

ANALISIS MATEMATICO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$



WWW.SOLUCIONARIOS.NET

Eduardo Espinoza Ramos

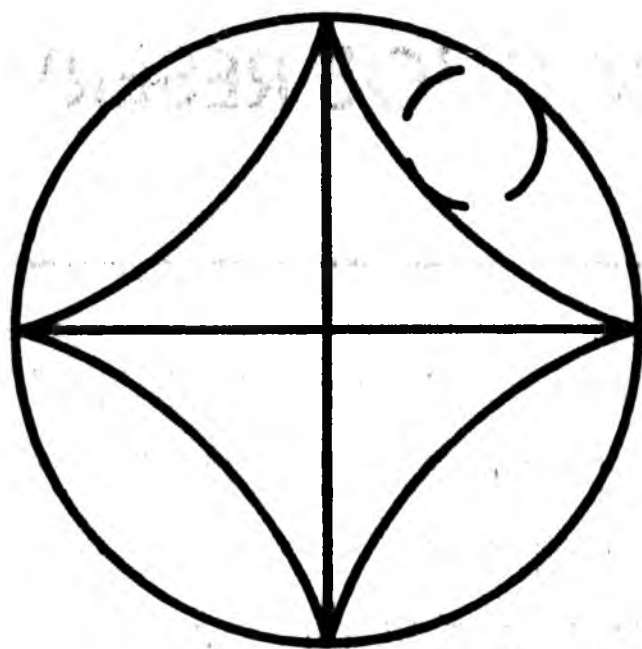
WWW.SOLUCIONARIOS.NET

ANALISIS MATEMATICO III

SOLUCIONARIO DEMIDOVICH

TOMO III

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$



EDUARDO ESPINOZA RAMOS

IMPRESO EN EL PERÚ

11 – 10 – 2010

5ta EDICIÓN

DERECHOS RESERVADOS

ESTE LIBRO NO PUEDE REPRODUCIRSE TOTAL Ó PARCIALMENTE POR NINGÚN MÉTODO GRÁFICO, ELECTRÓNICO O MECÁNICO, INCLUYENDO LOS SISTEMAS DE FOTOCOPIA, REGISTROS MAGNÉTICOS O DE ALIMENTACIÓN DE DATOS, SIN EXPRESO CONSENTIMIENTO DEL AUTOR Y EDITOR.

RUC	Nº 20520372122
Ley de Derechos del Autor	Nº 13714
Registro comercial	Nº 10716
Escritura Publica	Nº 4484

Hecho el deposito legal en la
Biblioteca Nacional del Perú
con el número

Nº 2007 – 12592

PRÓLOGO

Se sabe que la humanidad ha avanzado lentamente hacia la conquista de los conocimientos y la mayor de estas es la escritura, con ella la humanidad alcanzó el más alto sitio en la creación; pero tan antiguo como ella, es el concepto de cantidad. Esto nace aun antes de la escritura por eso la ciencia de los números están importante como la vida misma.

El avance tecnológico funda sus bases en los conceptos primarios, lo que estudiados, desarrollados y perfeccionados han llevado al hombre hacia grandes conquistas.

La aventura del pensamiento nos ha llevado de la mano con la tecnología a descubrir grandes realidades. Por ello mi deseo es plasmar en las paginas de este tercer tomo, en su cuarta edición del solucionario del libro problemas y ejercicios de análisis matemático por B. Demidovich, el planteo fácil a los diversos ejercicios que se presentan, además se incluye una colección de gráficos los que ayudarán eficazmente a la captación de los diferentes problemas.

Mi agradecimiento al lector por la preferencia que brindan a cada una de mis publicaciones, las que emanan del deseo de que encuentren en ellos una ayuda para su avance y desarrollo intelectual.

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos:

RONALD, JORGE y DIANA

que Dios ilumine sus caminos para que
puedan ser guías de su prójimo



- 6.1.
- 6.2.
- 6.3.
- 6.4.
- 6.5.
- 6.6.
- 6.7.
- 6.8.
- 6.9.
- 6.10.
- 6.11.
- 6.12.
- 6.13.
- 6.14.
- 6.15.
- 6.16.

INDICE

CAPÍTULO VI

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

	Pag.
Conceptos Fundamentales.	1
Continuidad.	22
Derivadas Parciales.	28
Diferencial Total de una Función.	41
Derivación de Funciones Compuestas.	53
Derivada de una Función dada y Gradiente de una Función.	66
Derivadas y Diferenciales de Ordenes Superiores.	76
Integración de Diferenciales Exactas.	104
Derivaciones de Funciones Implícitas.	117
Cambio de Variables.	141
Plano Tangente y Normal a una Superficie.	154
Formula de Taylor para las Funciones de Varias Variables.	167
Extremo de una Función de Varias Variables.	177
Problemas de Determinación de los Máximos y Mínimos Absolutos de las Funciones.	203
Puntos Singulares de las Curvas Planas.	226
Envolvente.	234

6.17.	Longitud de un Arco de una Curva en el Espacio.	242
6.18.	Función Vectorial de un Argumento Escalar.	246
6.19.	Triedro Intrínseco de una Curva en el Espacio.	257
6.20.	Curvatura de Flexión y de Torsión de una Curva en el Espacio.	277

CAPÍTULO VII

INTEGRALES MÚLTIPLES Y CURVILÍNEAS

7.1.	Integrales Dobles en Coordenadas Rectangulares.	290
7.2.	Cambios de Variables en la Integral Doble.	323
7.3.	Calculo de Áreas de Figuras Planas.	335
7.4.	Calculo de Volúmenes.	345
7.5.	Calculo de Áreas de Superficies.	362
7.6.	Aplicaciones de la Integral Doble a la Mecánica.	373
7.7.	Integrales Triples.	384
7.8.	Integrales Impropias, Dependientes de un Parámetro. Integrales Impropias Múltiples.	420
7.9.	Integrales Curvilíneas.	435
7.10.	Integrales de Superficie.	479
7.11.	Formula de Ostrogradski – Gauss.	493

CAPÍTULO VI

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

6.1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES.-

① **DEFINICIÓN.-** A una función de dos variables x e y se designa por $z = f(x,y)$ donde las variables x e y se llaman argumentos o variables independientes, en forma similar para el caso de tres variables.

② **CONCEPTOS DE EXISTENCIA DE LA FUNCIÓN.-**

Se entiende por campo de existencia de la función $z = f(x,y)$ al conjunto de puntos (x,y) del plano XY que determinan la función dada.

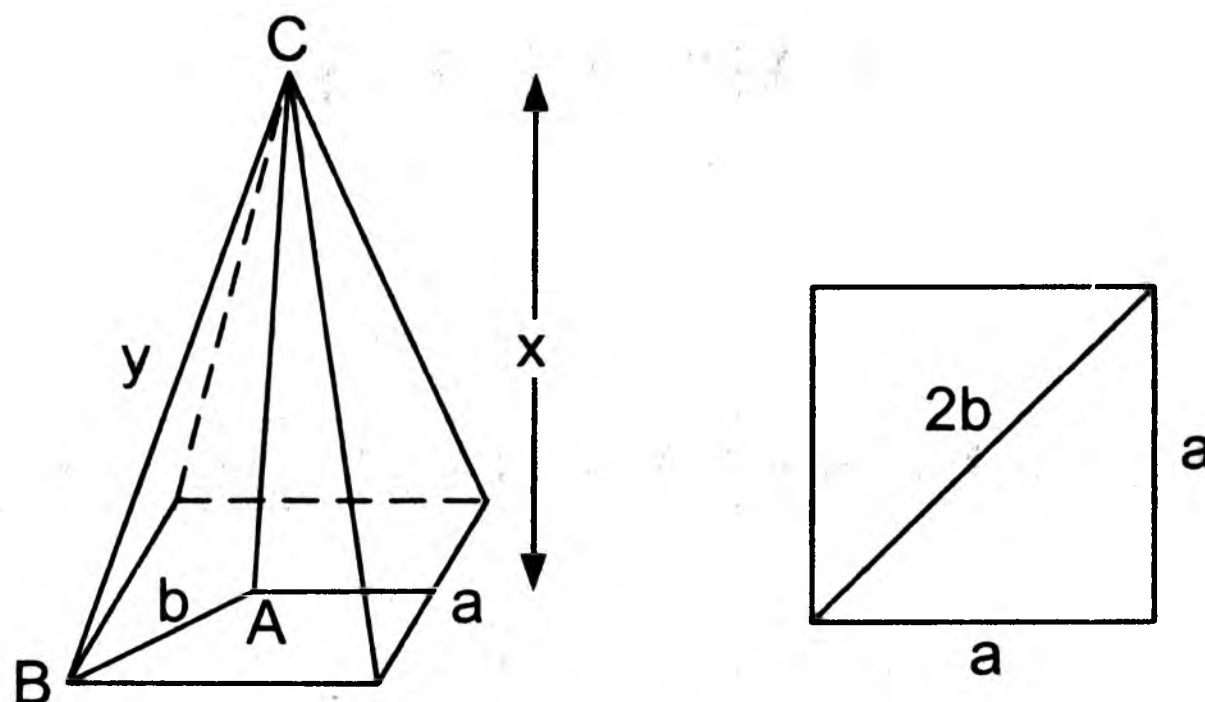
③ **LINEAS Y SUPERFICIES DE NIVEL DE LAS FUNCIONES.-**

La línea de nivel de la función $z = f(x,y)$ es la línea $f(x,y) = c$ del plano XY , en cuyos puntos de la función toma un mismo valor $z = c$.

Se entiende por superficie de nivel de una función de tres variables $u = f(x,y,z)$ a la superficie $f(x,y,z) = c$, en cuyos puntos la función toma un valor constante $u = c$.

1782 Expresar el volumen V de una pirámide cuadrangular regular en función de su altura x y de su arista y .

Desarrollo



Por Pitágoras se tiene: $4b^2 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$

En el triángulo ABC, se tiene: $y^2 = b^2 + x^2 \Rightarrow b^2 = y^2 - x^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2} = y^2 - x^2 \Rightarrow a^2 = 2(y^2 - x^2)$$

Como $V = \frac{1}{3}(\text{area base})x(\text{altura})$, en donde

Área base $= a^2 = 2(y^2 - x^2)$ y la altura es x

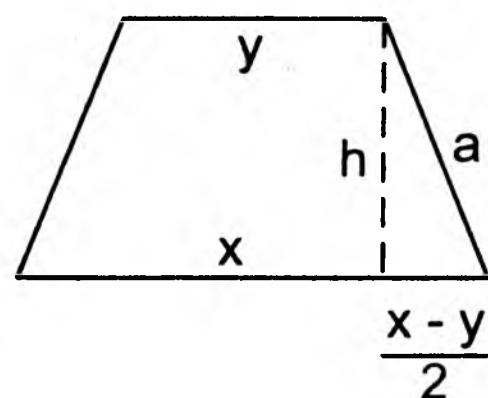
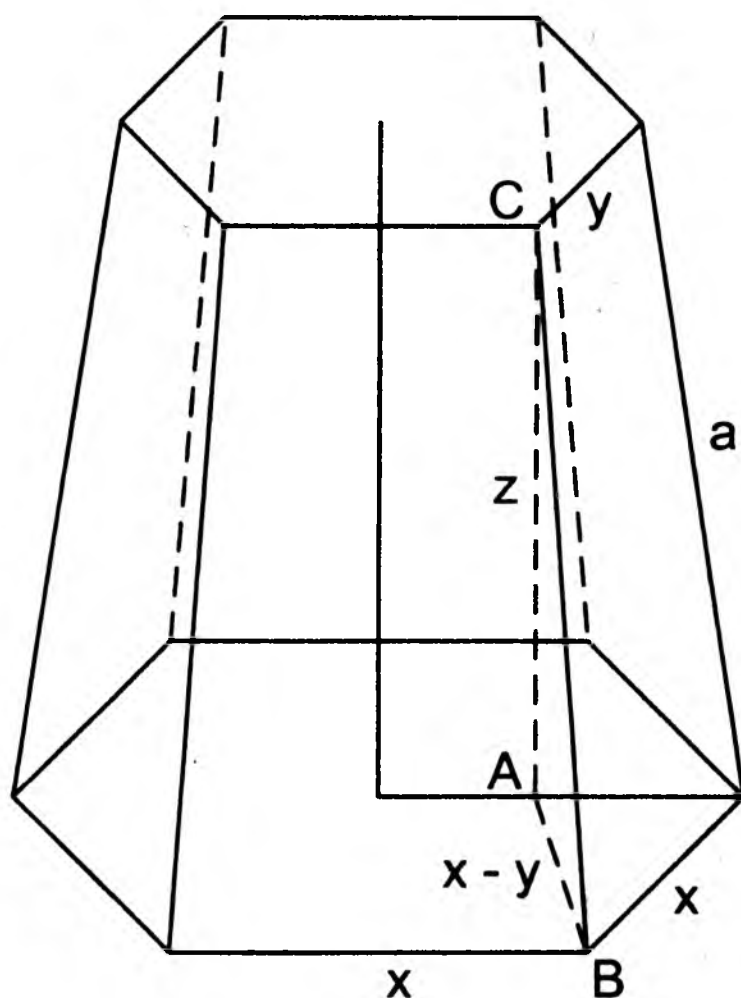
$$\text{Luego } V = \frac{1}{3} 2(y^2 - x^2)x = \frac{2x}{3}(y^2 - x^2) \quad \therefore V = \frac{2x}{3}(y^2 - x^2)$$

- 1783** Expresar el área S de la superficie lateral de un tronco de pirámide regular, en función de los lados x e y de las bases y de la altura z .

Desarrollo

Haremos la representación gráfica de acuerdo a los datos del problema.

$$\text{En el } \triangle ABC \text{ se tiene: } a^2 = (x - y)^2 + z^2 \quad \dots (1)$$



por Pitágoras se tiene: $h^2 = a^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$... (2)

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$h^2 = (x-y)^2 + z^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4z^2 + 3(x-y)^2}{4} \text{ de donde}$$

$$h = \frac{\sqrt{4z^2 + 3(x-y)^2}}{2}, \text{ además área de la superficie laterales:}$$

$$S = 6A_1 \text{ donde } A_1 = \frac{x+y}{2} \cdot h, \text{ que al reemplazar h se tiene:}$$

$$S = \frac{6(x+y)}{2} \cdot \frac{\sqrt{4z^2 + 3(x-y)^2}}{2} \therefore S = \frac{3}{2}(x+y)\sqrt{4z^2 + 3(x-y)^2}$$

1784 Hallar $f\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ y $f(1, -1)$ si $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$

Desarrollo

$$\text{Como } f(x, y) = xy + \frac{x}{y} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \left(\frac{1}{2}\right)(3) + \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$f(1, -1) = (1)(-1) + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{5}{3} \text{ y } f(1, -1) = -2$$

1785 Hallar $f(x, y)$, $f(-x, -y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, $\frac{1}{f(x, y)}$ si $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$

Desarrollo

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \Rightarrow f(-x, -y) = \frac{(-x)^2 - (-y)^2}{2(-x)(-y)} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{2\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \Rightarrow \frac{1}{f(x, y)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

1786 Hallar los valores que toma la función $f(x, y) = 1 + x - y$ en los puntos de la parábola $y = x^2$ y construir la gráfica de la función $F(x) = f(x, x^2)$.

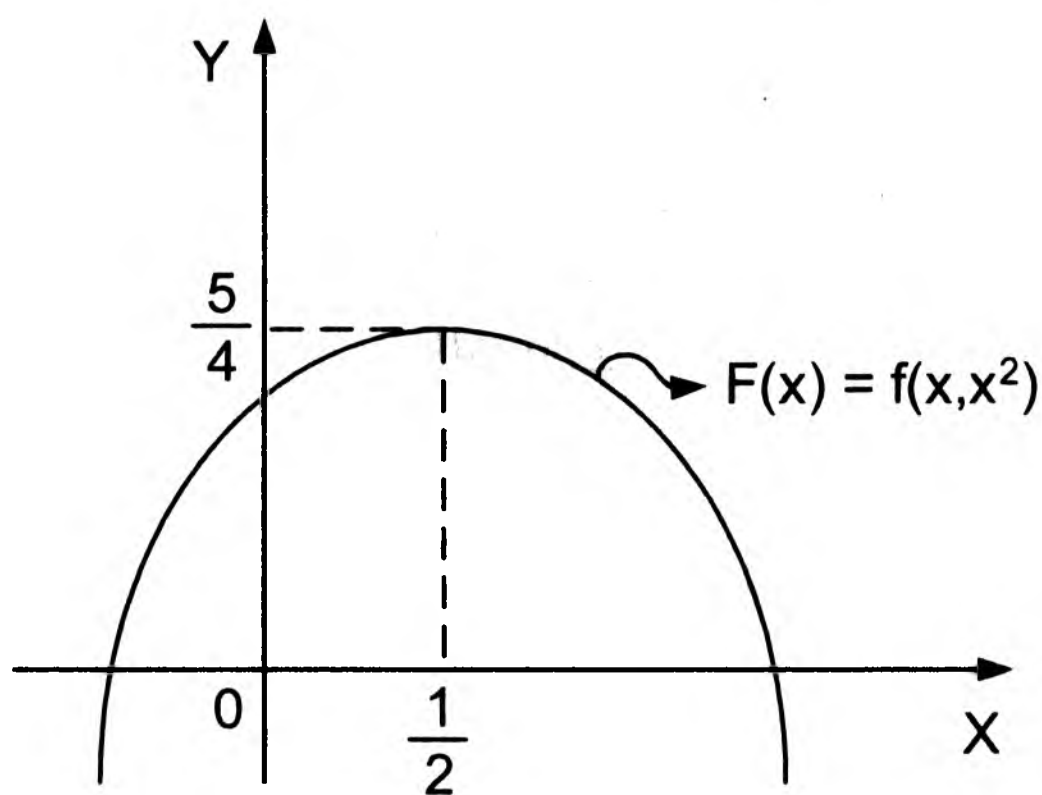
Desarrollo

Se tiene que $f(x, y) = 1 + x - y$ entonces

$$F(x) = f(x, x^2) = 1 + x - x^2 \Rightarrow y = 1 + x - x^2$$

ahora completamos cuadrados se tiene $y - \frac{5}{4} = -(x - \frac{1}{2})^2$

que nos representa una parábola de vértice $V(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ cuya gráfica es:



- 1787** Hallar el valor de la función $z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$ en los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$

Desarrollo

$$\text{Como } z = f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{1 - (x^2 + y^2)}$$

$$\text{Como } x^2 + y^2 = R^2 \text{ entonces } z = f(x, y) = \frac{R^4}{1 - R^2}$$

- 1788** Determinar $f(x)$ si $f(\frac{y}{x}) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$, ($xy > 0$)

Desarrollo

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} + 1}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} \quad \therefore f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}$$

1789 Hallar $f(x,y)$ si $f(x+y, x-y) = xy + y^2$

Desarrollo

$$\text{Haciendo } \begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}$$

$$\text{Como } f(x+y, x-y) = f(u, v) = \frac{u+v}{2} \cdot \frac{u-v}{2} + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

$$= \frac{u^2 - v^2}{4} + \frac{u^2}{4} - \frac{2uv}{4} + \frac{v^2}{4} = \frac{u^2}{2} - \frac{uv}{2} = \frac{u^2 - uv}{2}$$

$$\therefore f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{2}$$

1790 Sea $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$. Determinar las funciones f y z si $z = x$ para $y = 1$

Desarrollo

$$\text{Como } z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1) \text{ y } z = x \text{ para } y = 1$$

$$\text{Entonces } x = 1 + f(\sqrt{x} - 1) \Rightarrow f(\sqrt{x} - 1) = x - 1$$

$$\text{Sea } u = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = u + 1 \Rightarrow x = (u + 1)^2$$

$$f(\sqrt{x} - 1) = f(u) = (u + 1)^2 - 1 = u^2 + 2u \quad \therefore f(x) = x^2 + 2x$$

$$\text{como } f(\sqrt{x} - 1) = x - 1 \text{ entonces } z = x - 1 + \sqrt{y}$$

1791 Sea $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$. Determinar las funciones f y z , si $z = \sqrt{1 + y^2}$, para $x = 1$.

Desarrollo

$$\text{Como } z = xf\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \sqrt{1 + y^2} = f(y), \text{ donde } z = \sqrt{1 + y^2}, \text{ para } x = 1$$

$$\text{Como } z = xf\left(\frac{y}{x}\right) \text{ y } f(y) = \sqrt{1 + y^2} \text{ entonces}$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x|} \text{ de donde } z = xf\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{|x|}$$

$$\therefore z = x \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x|}$$

1792 Hallar y representar los campos de existencia de las siguientes funciones:

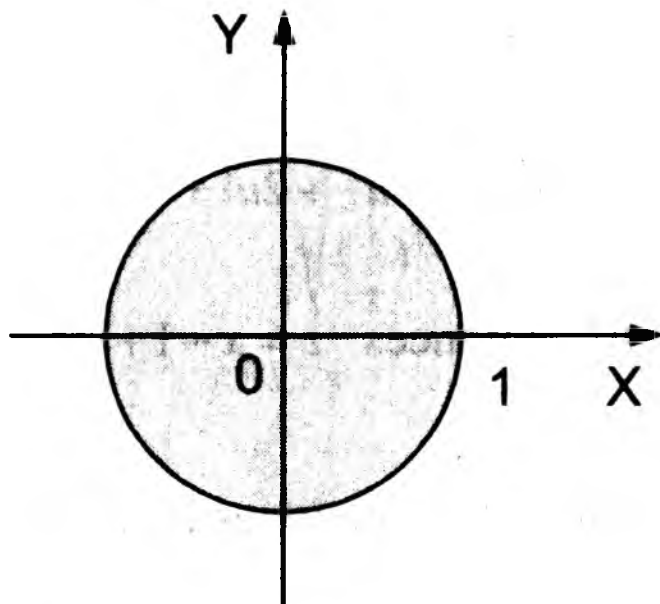
a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Desarrollo

Para que $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ esté bien definida debe cumplirse que

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \text{ de donde } x^2 + y^2 \leq 1$$

Luego su campo de existencia es el disco de radio 1.



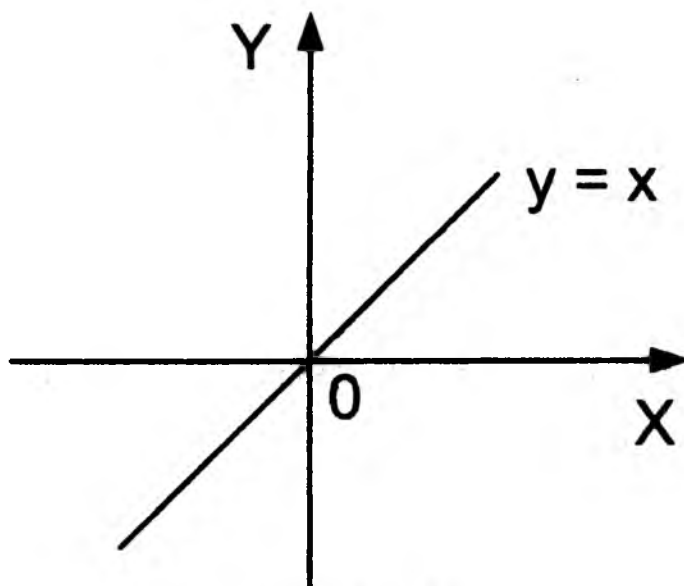
b) $z = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$

Desarrollo

Para que $z = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$ esté bien definida debe cumplirse que

$$-(x-y)^2 \geq 0 \text{ de donde } (x-y)^2 \leq 0 \text{ como } (x-y)^2 \leq 0 \Rightarrow y = x$$

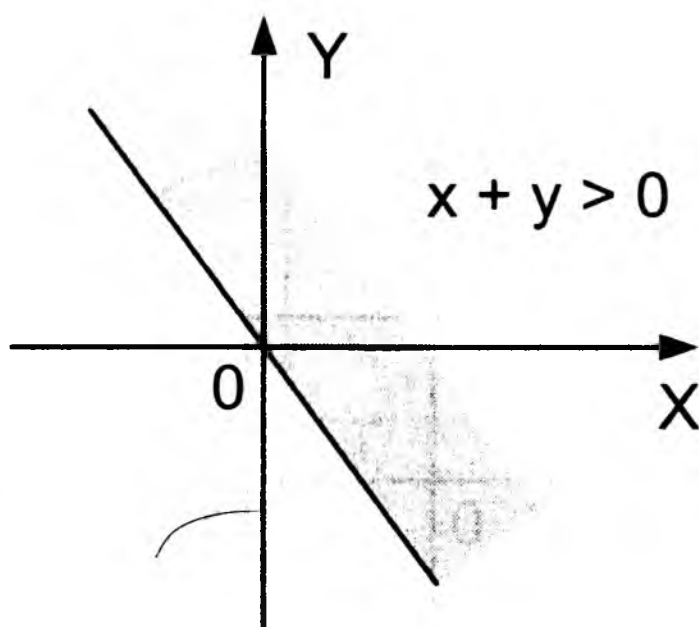
Luego $y = x$ es el campo de existencia de la función $z = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$



c) $z = \ln(x+y)$

Desarrollo

Para que $z = \ln(x+y)$ esté bien definida debe cumplirse $x+y > 0$, que nos representa un semi-plano que se encuentra sobre la recta $x+y > 0$

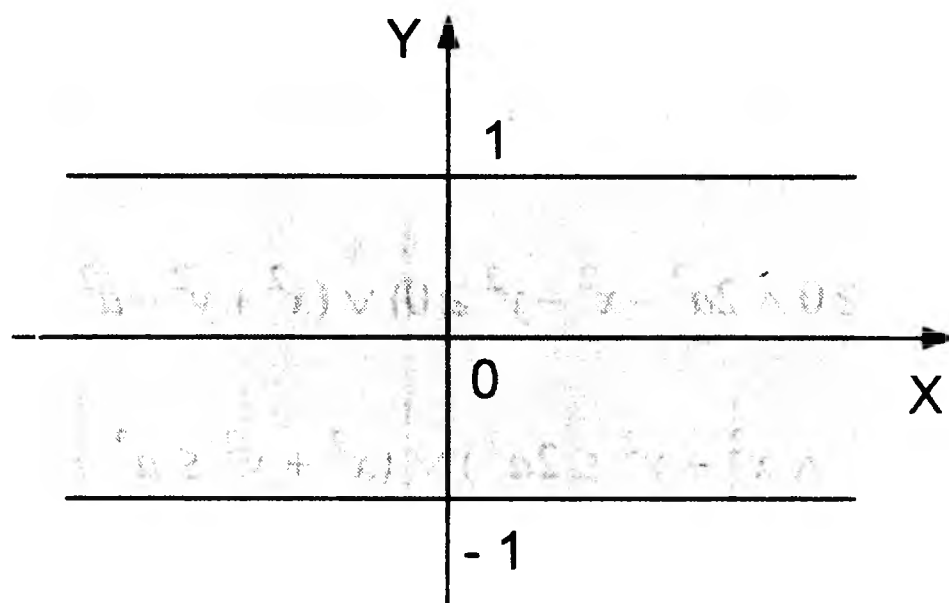


d) $z = x + \arccos y$

Desarrollo

Sea $w = \arccos y \Rightarrow \cos w = y$, pero como coseno varia entre -1 y 1 es decir para este caso $-1 \leq y \leq 1$ y la x toma todos los valores reales.

Luego el campo de existencia nos representa una faja comprendida entre -1 y 1

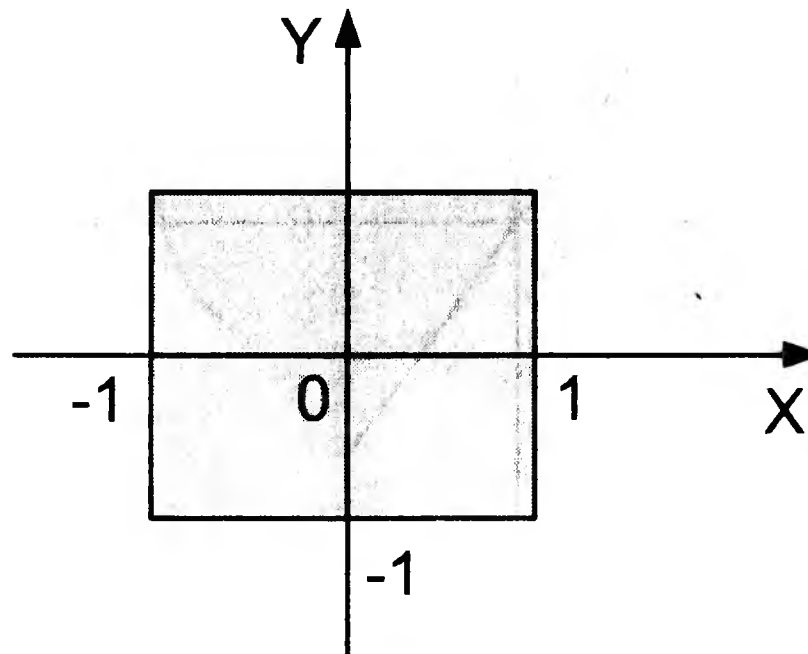


e) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$

Desarrollo

$z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ está bien definida si $1-x^2 \geq 0 \wedge 1-y^2 \geq 0$

donde $x^2 \leq 1 \wedge y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1$, que nos representa un cuadrado



f) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)}$, ($a > 0$)

Desarrollo

$z = f(x,y)$ está bien definida si se cumple que:

$$(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2) \geq 0 \quad \text{de donde se tiene:}$$

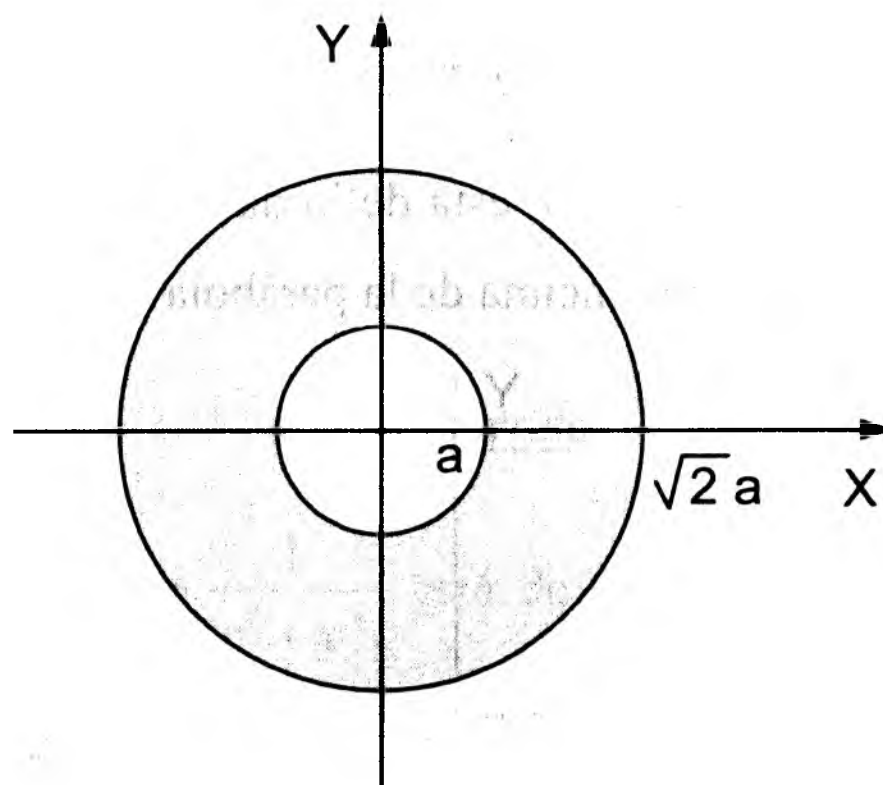
$$(x^2 + y^2 - a^2 \geq 0 \wedge 2a^2 - x^2 - y^2 \geq 0) \vee (x^2 + y^2 - a^2 \leq 0 \wedge 2a^2 - x^2 - y^2 \leq 0)$$

$$(x^2 + y^2 \geq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 2a^2) \vee (x^2 + y^2 \leq a^2 \wedge 2a^2 \leq x^2 + y^2)$$

$$(a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2) \vee (2a^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2)$$

$$a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2 \vee \phi \Rightarrow a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2$$

Luego $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2$ nos representa su anillo.



i) $z = \sqrt{y \operatorname{sen} x}$

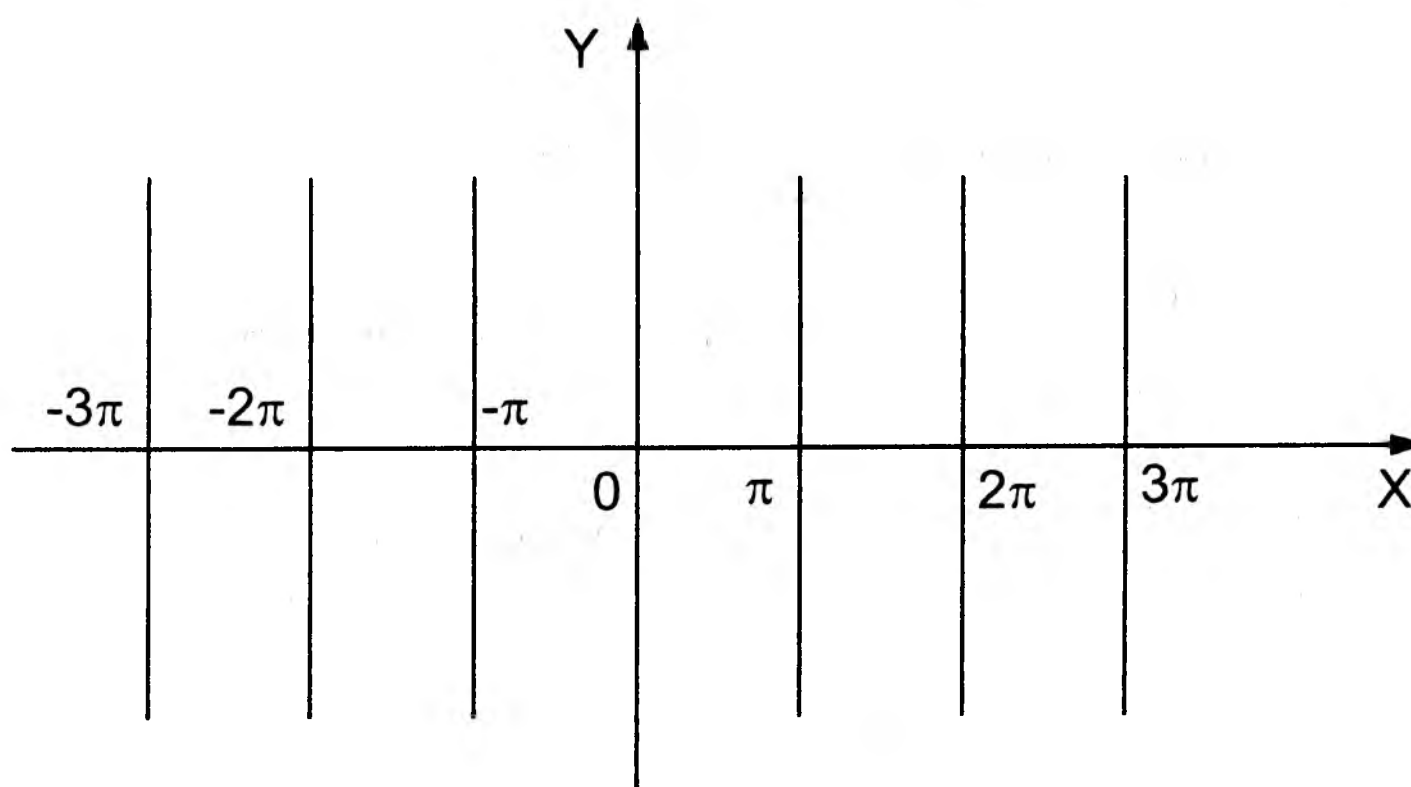
Desarrollo

$z = \sqrt{y \operatorname{sen} x}$ está definida si $y \operatorname{sen} x \geq 0$

como $y \operatorname{sen} x \geq 0 \Leftrightarrow (y \geq 0 \wedge \operatorname{sen} x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \operatorname{sen} x \leq 0)$

$\Leftrightarrow (y \geq 0 \wedge 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi) \vee$

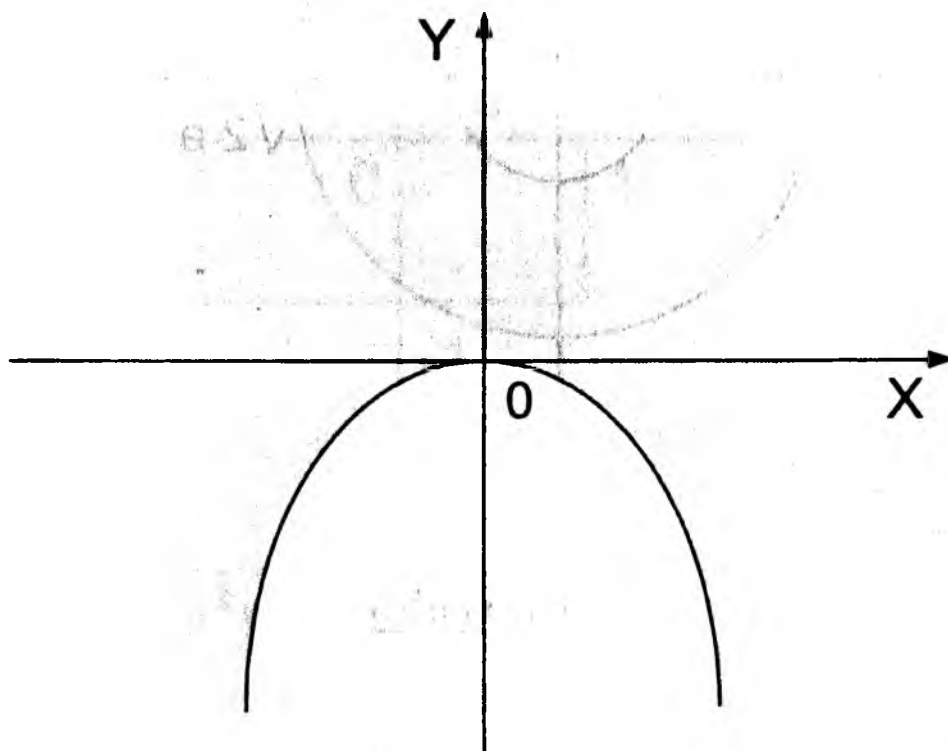
$(y \leq 0 \wedge (2n+1)\pi \leq x \leq (2n+2)\pi)$



j) $z = \ln(x^2 + y)$

Desarrollo

La función $z = \ln(x^2 + y)$ está definida si $x^2 + y > 0$ que nos representa la parte del plano por encima de la parábola $y = -x^2$



k) $z = \arctg\left(\frac{x-y}{1+x^2y^2}\right)$

Desarrollo

Como $z = \arctg\left(\frac{x-y}{1+x^2y^2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} z = \frac{x-y}{1+x^2y^2}$

Como $\operatorname{tg} z$ varia entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ se tiene:

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x-y}{1+x^2y^2} < \frac{\pi}{2} \text{ y como } 1+x^2y^2 > 0 \text{ entonces}$$

$$-\frac{\pi}{2}(1+x^2y^2) < x-y < \frac{\pi}{2}(1+x^2y^2) \text{ de donde}$$

$$x-y + \frac{\pi}{2}(1+x^2y^2) > 0 \wedge \frac{\pi}{2}(1+x^2y^2) + y - x > 0$$

ambas desigualdades son validas para tos $x, y \in \mathbb{R}$

Luego el campo de existencia es todo el plano XY

l) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$

Desarrollo

La función $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ está definida para todo $x, y \in \mathbb{R}$ que cumple

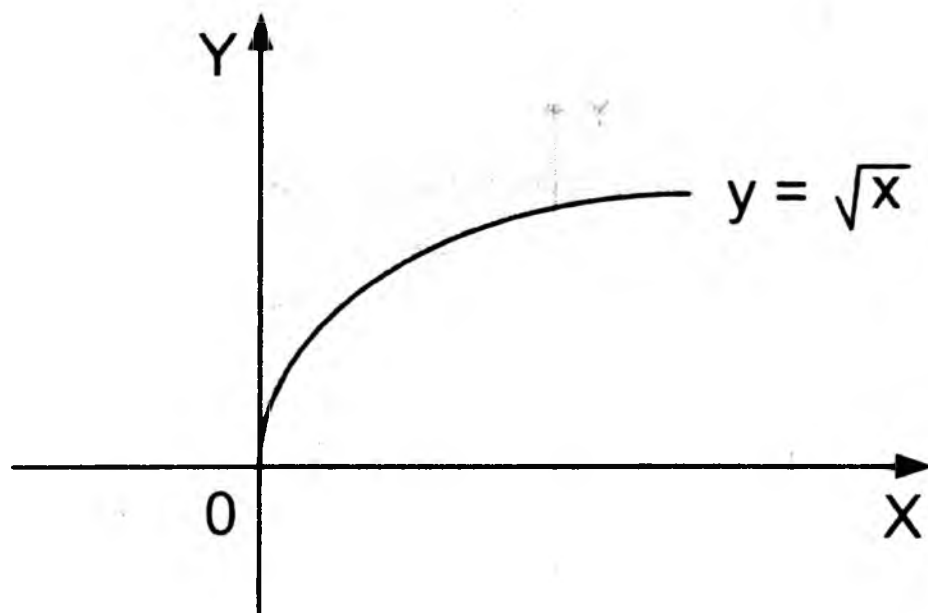
$x^2 + y^2 \neq 0$ es decir que el campo de existencia es \mathbb{R}^2 menos el origen

m) $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

Desarrollo

La función $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$ está definida si $y - \sqrt{x} > 0 \wedge x > 0$ de donde

$y > \sqrt{x} \wedge x \geq 0$ que nos representa la parte del plano sobre la rama de la parábola $y = \sqrt{x}$ y a la derecha del eje Y sin incluirlo.

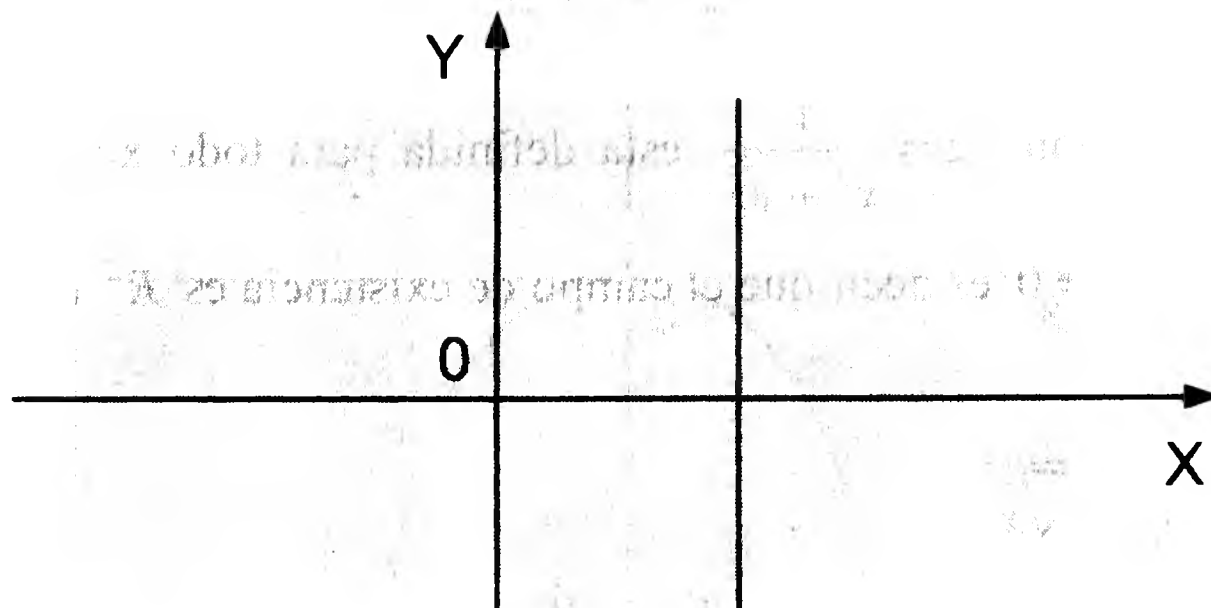


n) $z = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$

Desarrollo

La función $z = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$ está definida para $x - 1 \neq 0 \wedge y \neq 0$, es decir

que el campo de existencia es todos los puntos del plano menos los puntos de las rectas $x = 1 \wedge y = 0$

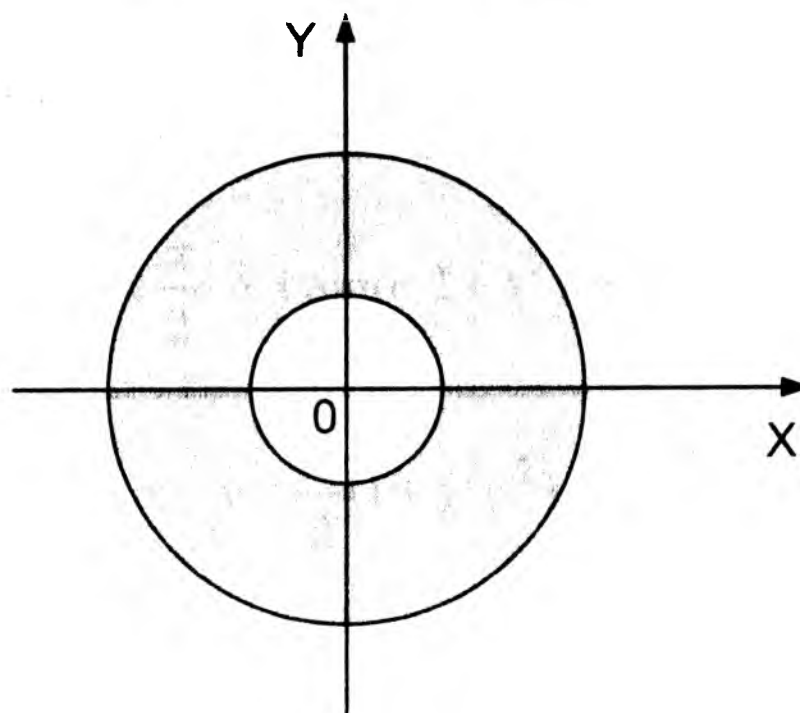


o) $z = \sqrt{\text{sen}(x^2 + y^2)}$

Desarrollo

La función $z = \sqrt{\text{sen}(x^2 + y^2)}$ está definida para $\text{sen}(x^2 + y^2) \geq 0$

de donde $2n\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}^+$



1793 Hallar los campos de existencia de las siguientes funciones de tres argumentos.

a) $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

Desarrollo

La función $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ está definida si $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0$ que nos representa el primer octante incluyendo la frontera.

b) $u = \ln(xyz)$

Desarrollo

La función $u = \ln(xyz)$ está definida si $xyz > 0$

De donde $(x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0) \vee$

$$(x < 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0)$$

Que nos representa el 1er, 3er, 6to y 8vo octante sin incluir la frontera.

c) $u = \operatorname{arcsec} x + \arcsen y + \arcsen z$

Desarrollo

Como la función seno varia entre -1 y 1 se tiene:

$-1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge -1 \leq z \leq 1$, que nos representa un cubo.

d) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

Desarrollo

La función $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ está definida si:

$1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ que nos representa el interior de una esfera incluido el borde.

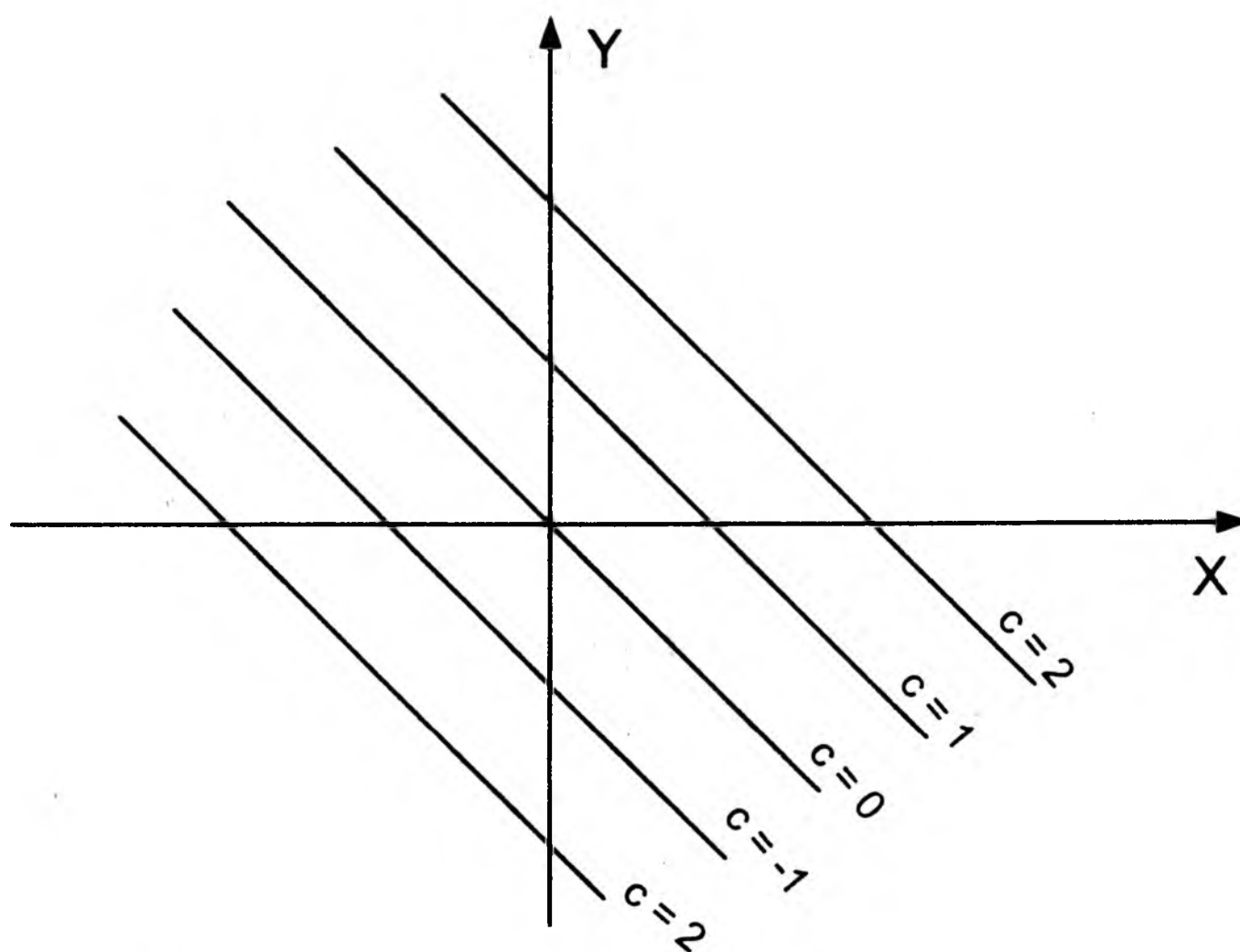
1794 Construir las líneas de nivel de las funciones que se dan a continuación y averiguar el carácter de las superficies representadas por dichas funciones:

a) $z = x + y$

Desarrollo

Hacemos $z = c$ donde $c = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

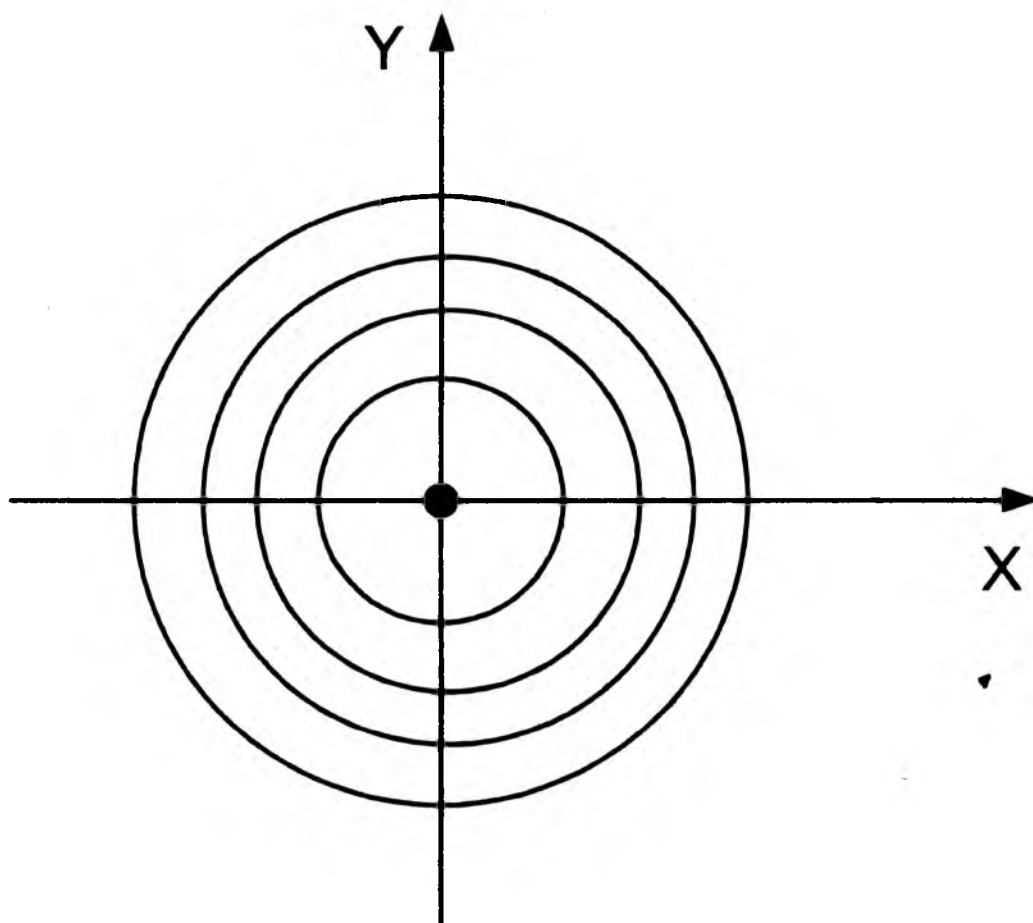
Luego $x + y = c$ nos representa rectas, que vienen hacer líneas de nivel.



b) $z = x^2 + y^2$

Desarrollo

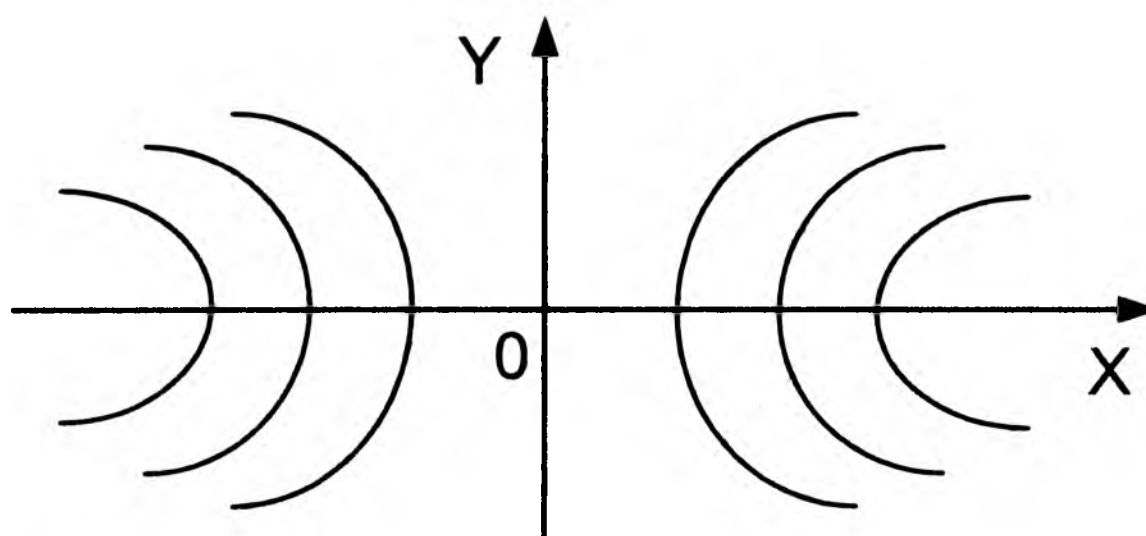
En forma similar que la parte a) se tiene $x^2 + y^2 = c$, donde $c = 0, 1, 2, \dots$ y las líneas de nivel son circunferencias concéntricas con centro en $(0,0)$ donde $c \geq 0$



c) $z = x^2 - y^2$

Desarrollo

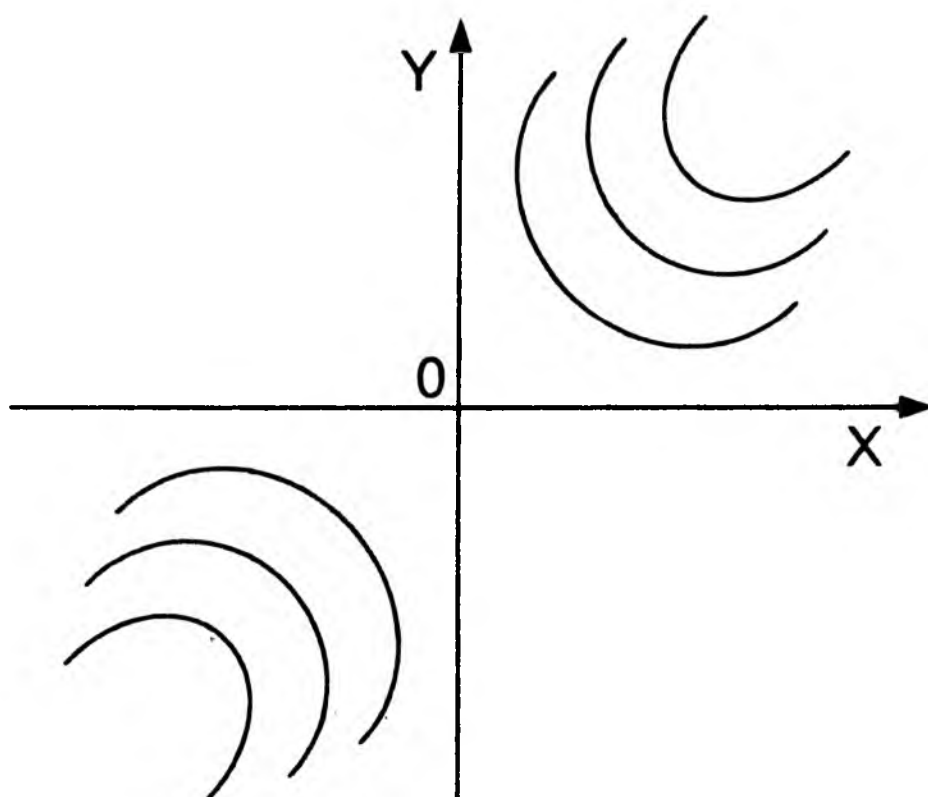
Haciendo $z = c$, $c \in \mathbb{R}$ se tiene $x^2 - y^2 = c$ que son hipérbolas que nos representa a las líneas de nivel.



d) $z = \sqrt{xy}$

Desarrollo

Hacemos $z = c$ luego $c = \sqrt{xy} \Rightarrow xy = c^2$ que son hipérbolas equiláteras y nos representan a las líneas de nivel.

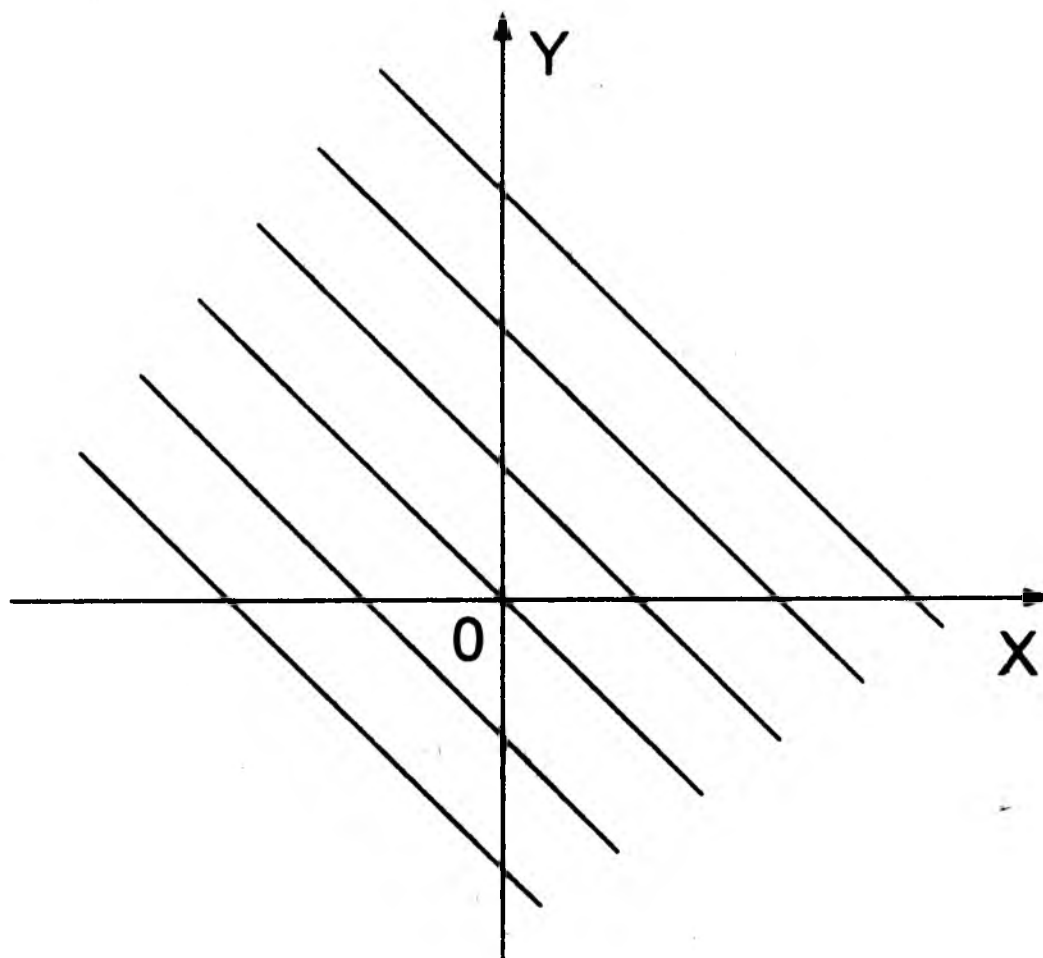


e) $z = (1+x+y)^2$

Desarrollo

Hacemos $z = c$ de donde $(1+x+y)^2 = c \Rightarrow x+y+1 = c^2$

$\Rightarrow x + y = k$ que son rectas paralelas y nos representa a las líneas de nivel.

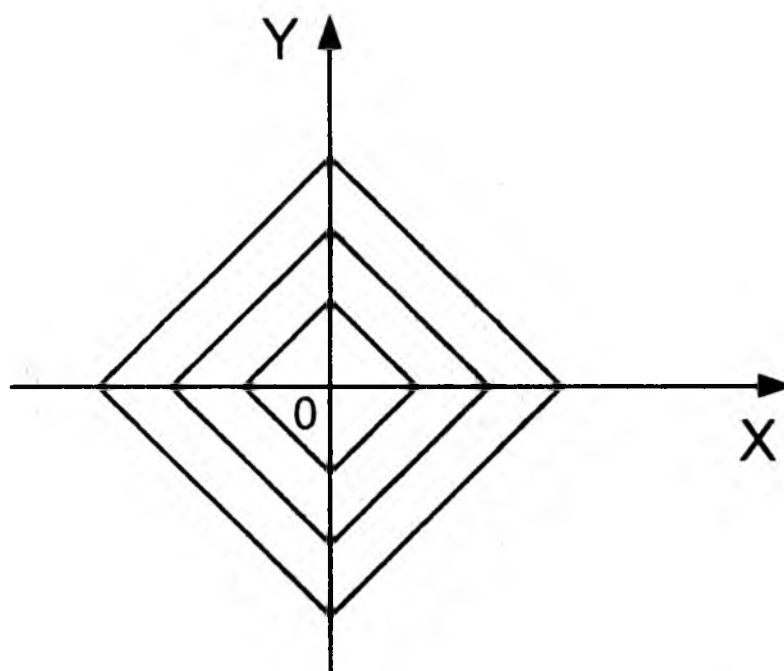


f) $z = 1 - |x| - |y|$

Desarrollo

Hacemos $z = c \Rightarrow c = 1 - |x| - |y|$ de donde

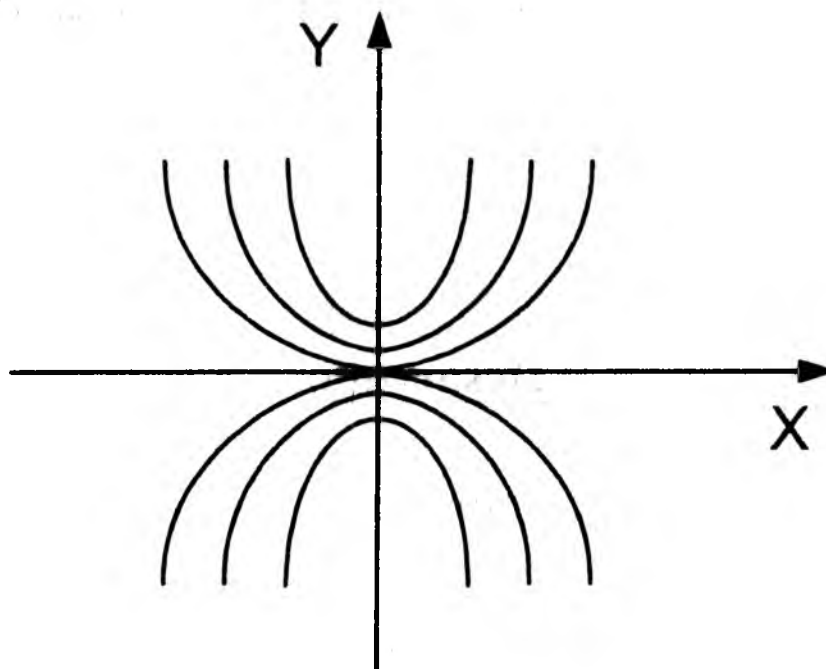
$|x| + |y| = k$ donde $k = 1 - c$ que nos representa las líneas de nivel que son cuadrados



g) $z = \frac{y}{x^2}$

Desarrollo

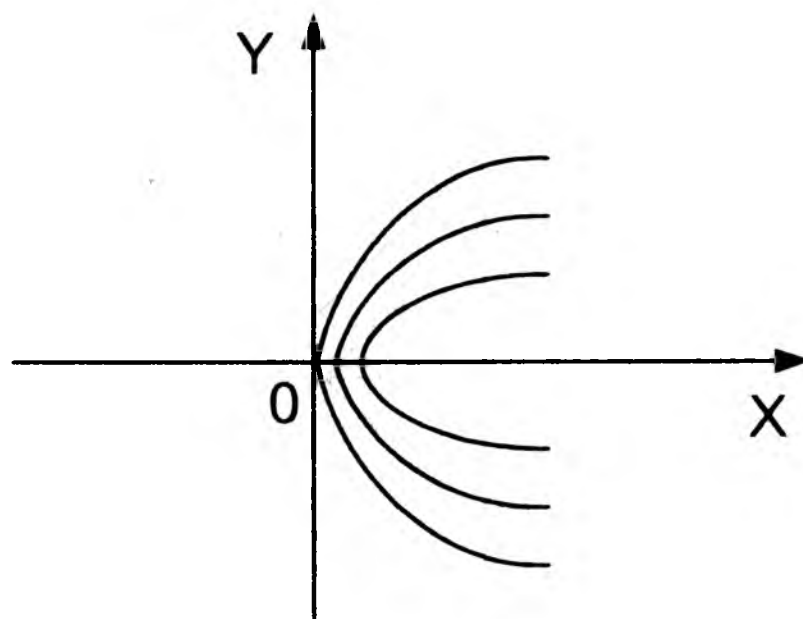
Sea $z = c$, $c \in \mathbb{R}$ es decir: $y = cx^2$ que son parábolas y que nos representa las curvas de nivel.



h) $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$

Desarrollo

Hacemos $z = \frac{y}{\sqrt{x}} = c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow y = c\sqrt{x}$ que nos representa ramas de la parábola y que son las líneas de nivel.



i) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$

Desarrollo

Hacemos $z = c, c \in \mathbb{R}$ es decir: $\frac{2x}{x^2 + y^2} = c \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{2}{c}x$ que

son circunferencias que nos representa las líneas de nivel.

1795 Hallar las líneas de nivel de las siguientes funciones:

a) $z = \ln(x^2 + y)$

Desarrollo

Hacemos $z = c, c \in \mathbb{R}$ entonces:

$\ln(x^2 + y) = c$ entonces $x^2 + y = e^c = k$

Luego $x^2 + y = k$ que son parábolas que nos representan las líneas de nivel.

b) $z = \arcsen(xy)$

Desarrollo

Hacemos $z = c \Rightarrow \sin c = xy = k$ que son hipérbolas equiláteras

En forma similar para las demás

c) $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$

d) $z = f(y - ax)$

e) $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$

1796 Hallar las superficies de nivel de las funciones de tres variables independientes.

a) $u = x + y + z$

Desarrollo

Hacemos $u = c$, $c \in \mathbb{R}$, entonces $x + y + z = c$ que son planos paralelos que nos representan las superficies de nivel.

b) $u = x^2 + y^2 + z^2$

Desarrollo

Hacemos $u = c$, donde $c \geq 0$ entonces $x^2 + y^2 + z^2 = c$ que son esferas concéntricas de centro $(0,0,0)$ y nos representan las superficies de nivel.

c) $u = x^2 + y^2 - z^2$

Desarrollo

Hacemos $u = c$ donde $c \in \mathbb{R}$, luego $x^2 + y^2 - z^2 = c$ a que consideremos dos casos.

Cuando $c > 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = c$ nos representan hipérbolas de revolución de una hoja alrededor del eje Z.

cuando $c < 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = c$ nos representan hiperboloides de revolución de dos hojas, alrededor del mismo eje, ambas superficies están divididas por el cono $x^2 + y^2 - z^2 = c$.

6.2. CONTINUIDAD.-

① LIMITE DE UNA FUNCIÓN.-

Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables, entonces:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si}$$

$$0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \text{ entonces } |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

② CONTINUIDAD Y PUNTO DE DISCONTINUIDAD.-

La función $z = f(x,y)$ es continua en el punto $P(a,b)$ si:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Si la función es continua en todos los puntos de un campo determinado, se llama continuidad en ese campo.

Las condiciones de continuidad de una función $f(x,y)$ puede no cumplirse en puntos aislados o en puntos que formen una o varias líneas y a veces figuras geométricas más complicadas.

1797 Hallar los siguientes limites de las funciones.

a)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$$

Desarrollo

Se conoce que: $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) \leq 1$

$$-(x^2 + y^2) \leq (x^2 + y^2) \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) \leq x^2 + y^2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -(x^2 + y^2) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)$$

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) \leq 0 \quad \therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \text{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) = 0$$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

Desarrollo

Tomemos el camino $y = x$ que pasa por el origen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x}{x^2+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

tomamos otro camino que pase por el origen $y = x^2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x^2}{x^2+x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{x+x^3} = 0$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$$

ahora se aplica la definición de límite y se demuestra que si existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\text{sen} xy}{x}$

Desarrollo

Sea $y = 2$ una recta que pasa por $(0,2)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\text{sen} xy}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\text{sen} 2x}{2x} = 2$$

tomemos otro camino $y = 2 + x$ que pasa por $(0,2)$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\text{sen} xy}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x + x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen} 2x \cdot \cos x^2}{x} + \frac{\cos 2x \cdot \text{sen} x^2}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\text{sen} 2x}{2x} \cdot \cos x^2 + \lim_{x \rightarrow 0} x \cos 2x \cdot \frac{\text{sen} x^2}{x^2} = 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, k)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$

Desarrollo

Sea $y = k$ entonces se tiene:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, k)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k = e^k$$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$

Desarrollo

Tomemos dos caminos que pasen por el origen

$y = 2x$, $y = 5x$ entonces se tiene:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+2x} = \frac{1}{3} \quad \dots (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+5x} = \frac{1}{6} \quad \dots (2)$$

como $(1) \neq (2)$ entonces $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$

f)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Desarrollo

Tomemos dos rectas que pasan por el origen de coordenadas tal como $y = 2x$, $y = 3x$

Si $y = 2x$,
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x^2}{x^2 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5} \quad \dots (1)$$

Si $y = 3x$,
$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 9x^2}{x^2 + 9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x^2}{10x^2} \\ &= -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

como $(1) \neq (2)$ entonces $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

1798 Averiguar si es continua la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Desarrollo

Consideremos $z = x^2 + y^2$, luego se tiene:
$$F(z) = f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-z} & \text{si } z \leq 1 \\ 0 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

ahora calculamos el limite de $F(z)$ cuando $z \rightarrow 1$

$$\exists \lim_{z \rightarrow 1} F(z) \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 1^-} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} F(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1^-} \sqrt{1-z} = \sqrt{1-1} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} 0 = 0$$

$$\text{como } \lim_{z \rightarrow 1^-} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} F(z) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{z \rightarrow 1} F(z) = 0$$

además $\lim_{z \rightarrow 1} F(z) = F(1) = 0$ se concluye que $F(z)$ es continua

1798 Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

Desarrollo

Como $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $x^2 + y^2 > 0$ entonces la función $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ es continua en todo R^2 menos en el origen

b) $z = \frac{1}{(x-y)^2}$

Desarrollo

La función $z = \frac{1}{(x-y)^2}$ es discontinua en todos los puntos $y = x$.

c) $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$

Desarrollo

La función $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ es discontinua en todos los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

1800 Demostrar que la función $z = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$ es continua con

relación a cada una de las variables x e y por separado, pero no es continua en el punto $(0,0)$ respecto al conjunto de estas variables.

Desarrollo

Veremos la continuidad de x e y por separado:

Sea $y = k$ entonces $f_1(x) = \frac{2kx}{x^2 + k^2}$ es continua en todas partes puesto que $x^2 + k^2 \neq 0$ y para el caso $k = 0$, $f_1(x) = 0$

En forma similar para $x = m$ se tiene: $f_2(y) = \frac{2my}{y^2 + m^2}$ es continua en todas partes puesto que $y^2 + m^2 \neq 0$, $m \neq 0$ y para el caso $m = 0$, $f_2(y) = 0$

Ahora veremos que en $(0,0)$ la función no es continua

Tomemos $y = x$ que pasa por $(0,0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1 \quad \dots (1)$$

para $y = 4x$ que para por $(0,0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{17x^2} = \frac{8}{17} \quad \dots (2)$$

como (1) y (2) son diferentes $\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ por lo tanto la función es discontinua en (0,0).

6.3. DERIVADAS PARCIALES.-

① DEFINICIÓN DE LAS DERIVADAS PARCIALES.-

Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables si consideramos a la variable y como constante entonces: la derivada parcial de z con respecto a x es:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y)$$

si consideremos a la variable x como constante entonces la derivada parcial de z con respecto a y es:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y)$$

② TEOREMA DE EULER.-

La función $f(x,y)$ se denomina función homogénea de grado n , si para cada factor real k se cumple que:

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y)$$

una función racional entera será homogénea si todos los puntos de la misma son del mismo grado para toda función homogénea diferenciable de grado n , se verifica siempre la igualdad (Teorema de Euler).

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y)$$

Hallar las derivadas parciales de las funciones

1801 $z = x^3 - y^3 - 3axy$

Desarrollo

$$\text{Como } z = x^3 - y^3 - 3axy \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3ay \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 3ax \end{cases}$$

1802 $z = \frac{x-y}{x+y}$

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y) \frac{\partial}{\partial x} (x-y) - (x-y) \frac{\partial}{\partial x} (x+y)}{(x+y)^2} = \frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x+y) \frac{\partial}{\partial y} (x-y) - (x-y) \frac{\partial}{\partial y} (x+y)}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)(-1) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

1803 $z = \frac{y}{x}$

Desarrollo

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

1804 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

Desarrollo

$$z = \sqrt{x^2 - y^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \end{cases}$$

1805 $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}(0) - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1806 $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{0 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} (x + \sqrt{x^2 + y^2})}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} (x + \sqrt{x^2 + y^2})}$$

1807 $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Desarrollo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{array} \right.$$

1808 $z = x^y$

Desarrollo

$$z = x^y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \end{array} \right.$$

1809 $z = e^{\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)}$

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2} e^{\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})} \cos(\frac{y}{x}) \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} e^{\operatorname{sen}(\frac{y}{x})} \cos(\frac{y}{x})$$

1810 $z = \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}}{\frac{|y|(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{xy^2 \sqrt{2x^2 - 2y^2}}{|y|(x^4 - y^4)}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy^2 \sqrt{2x^2 - 2y^2}}{|y|}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} = \frac{\frac{-y^2 \sqrt{2x^2 - y^2}}{(x^2 + y^2)^2}}{\frac{|y|(x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{-y^2 \sqrt{2x^2 - y^2}}{|y|(x^4 - y^4)}$$

1811 $z = \ln(\operatorname{sen}(\frac{x+a}{\sqrt{y}}))$

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos(\frac{x+a}{\sqrt{y}}) \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)}{\operatorname{sen}(\frac{x+a}{\sqrt{y}})} = \frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{ctg}(\frac{x+a}{\sqrt{y}})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos(\frac{x+a}{\sqrt{y}})}{\operatorname{sen}(\frac{x+a}{\sqrt{y}})} \left(-\frac{x+a}{2y^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{x+a}{2y^{\frac{3}{2}}} \operatorname{ctg}(\frac{x+a}{\sqrt{y}})$$

1812 $u = (xy)^z$

Desarrollo

$$u = (xy)^z \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = zx(xy)^{z-1} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = zy(xy)^{z-1} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln(xy) \end{cases}$$

1813 $u = z^{xy}$

Desarrollo

$$u = z^{xy} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy} \ln z \\ \frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy} \ln z \\ \frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1} \end{cases}$$

1814 Hallar $f'_x(2,1)$ y $f'_y(2,1)$ si $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

Desarrollo

$$f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) = \frac{y + \frac{1}{y}}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \\ f'_y(x,y) = \frac{x - \frac{x}{y^2}}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x(2,1) = \frac{1+1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{2} \\ f'_y(2,1) = \frac{2-2}{2\sqrt{2+2}} = \frac{0}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(2,1) = \frac{1}{2} \\ f'_y(2,1) = 0 \end{cases}$$

1815 Hallar $f'_x(1,2,0)$, $f'_y(1,2,0)$ y $f'_z(1,2,0)$ si $f(x,y,z) = \ln(xy+z)$

Desarrollo

$$f(x,y,z) = \ln(xy+z) \Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y,z) = \frac{y}{xy+z} \\ f'_y(x,y,z) = \frac{x}{xy+z} \\ f'_z(x,y,z) = \frac{1}{xy+z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,2,0) = \frac{2}{2+0} = 1 \\ f'_y(1,2,0) = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \\ f'_z(1,2,0) = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Comprobar el Teorema de Euler sobre las funciones homogéneas del 1816 – 1819

1816 $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$

Desarrollo

$$f(kx,ky) = Ak^2x^2 + 2Bk^2xy + Ck^2y^2 = k^2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) = k^2f(x,y)$$

Luego $f(x,y)$ es homogénea de grado $k = 2$

1817 $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Desarrollo

$$f(kx,ky) = \frac{kx}{k^2x^2 + k^2y^2} = k^{-1} \frac{x}{x^2 + y^2} = k^{-1}f(x,y)$$

por lo tanto $f(kx,ky) = k^{-1}f(x,y)$

1818 $f(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

Desarrollo

$$f(kx, ky) = \ln\left(\frac{ky}{kx}\right) = k^0 \ln\left(\frac{y}{x}\right) = k^0 f(x, y)$$

Luego $f(x, y)$ es homogénea de grado cero

1819 $f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$

Desarrollo

$$f(kx, ky) = \frac{kx + ky}{\sqrt[3]{k^2 x^2 + k^2 y^2}} = k^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \right) = k^{\frac{1}{3}} f(x, y)$$

por lo tanto $f(kx, ky) = k^{\frac{1}{3}} f(x, y)$

1820 Hallar $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Desarrollo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \frac{1}{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1821 Calcular $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$, si $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

Desarrollo

$$x = r \cos \theta \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen} \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \operatorname{sen}^2 \theta = r$$

1822 Demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$, si $z = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

Desarrollo

$$z = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + y}{x^2 + yx + y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y + x}{x^2 + yx + y^2} \end{cases}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2 + xy}{x^2 + xy + y^2} + \frac{2y^2 + xy}{x^2 + xy + y^2} = \frac{2(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = 2$$

$$\therefore x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

1823 Demostrar que: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ si $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$

Desarrollo

$$z = xy + xe^{\frac{y}{x}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} + e^{\frac{y}{x}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + e^{\frac{y}{x}} \end{cases}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy - ye^{\frac{y}{x}} + xe^{\frac{y}{x}} + ye^{\frac{y}{x}} + xy = xy + (xy + xe^{\frac{y}{x}}) = xy + z$$

$$\therefore x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

1824 Demostrar que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, si $u = (x - y)(y - z)(z - x)$

Desarrollo

$$u = (x - y)(y - z)(z - x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = (y - z)(z - x) - (x - y)(y - z) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = (x - y)(z - x) - (y - z)(z - x) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = (x - y)(y - z) - (x - y)(z - x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} &= (y - z)(z - x) - (x - y)(y - z) + (x - y)(z - x) - \\ &\quad -(y - z)(z - x) + (x - y)(y - z) - (x - y)(z - x) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

1825 Demostrar que: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$, si $u = x + \frac{x - y}{y - z}$

Desarrollo

$$u = x + \frac{x-y}{y-z} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{1}{y-z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z-x}{(y-z)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x-y}{(y-z)^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 1 + \frac{1}{y-z} + \frac{z-x}{(y-z)^2} + \frac{x-y}{(y-z)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{y-z} + \frac{z-y}{(y-z)^2} = 1 + \frac{1}{y-z} - \frac{1}{y-z} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

1826 Hallar $z = z(x,y)$ si $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \text{ integrando se tiene:}$$

$$z = \int \frac{x dy}{x^2 + y^2} + \varphi(x) \quad z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi(x)$$

1827 Hallar $z = z(x,y)$, sabiendo que: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{x}$ y $z(x,y) = \operatorname{sen} y$ cuando $x =$

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{x} \text{ integrando se tiene: } z = \frac{x^2}{2} + y^2 \ln x + g(y)$$

$$\text{cuando } x = 1, z = \sin y \text{ entonces } \sin y = \frac{1}{2} + g(y) \Rightarrow g(y) = \sin y - \frac{1}{2}$$

$$\therefore z = \frac{x^2}{2} + y^2 \ln x + \sin y - \frac{1}{2}$$

1828 Por el punto M(1,2,6) de la superficie $z = 2x^2 + y^2$ se han hecho pasar planos paralelos a las coordenadas XOZ e YOZ. Determinar, que ángulos forman con los ejes coordenados las tangentes a las secciones así obtenidos en su punto común M.

Desarrollo

a) Si se considera el plano paralelo al plano XOZ, este plano es perpendicular al eje Y y por lo tanto $\beta = 90^\circ$ y $\text{tg } \beta = \infty$ y la pendiente

$$\text{de la tangente seria: } \text{tg } \alpha = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1} = 4(1) = 4 \Rightarrow \text{tg } \alpha = 4 \text{ y el ángulo}$$

$$\text{formado por la tangente y el eje Z será } \alpha + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{de donde } \text{tg } \gamma = \text{tg}(90 - \alpha) = \text{ctg } \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{tg } \gamma = \frac{1}{4}$$

b) Si se considera el plano paralelo al plano YOZ entonces dicho plano es perpendicular al eje X y su ángulo $\alpha = 90^\circ$ de donde $\text{tg } \alpha = \infty$ y la

$$\text{pendiente de la tangente será } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y=2} = 2y|_{y=2} = 4$$

$$\text{Luego } \text{tg } \beta = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y=2} = 4 \Rightarrow \text{tg } \beta = 4$$

Y el ángulo formado por la tangente y el eje X será:

$$\beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ - \beta$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{4}$$

1829 El área de un trapezio de bases a , b y de altura h es igual a $S = \frac{a+b}{2}h$, hallar

$\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$, $\frac{\partial S}{\partial h}$ y mediante su dibujo, establecer su sentido geométrico.

Desarrollo

$$S = \frac{a+b}{2}h \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{h}{2} \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{h}{2} \\ \frac{\partial S}{\partial h} = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

1830 Demostrar que la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$ tiene derivadas

parciales $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en el punto $(0, 0)$ a pesar de ser discontinua en este punto.

Desarrollo

Calculando las derivadas parciales en el punto $(0, 0)$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

ahora veremos la discontinuidad, para esto tomamos dos caminos que pasen por $(0, 0)$, tales como $y = x$, $y = 4x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1 \quad \dots (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{17x^2} = \frac{8}{17} \quad \dots (2)$$

como $(1) \neq (2)$ entonces $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

por lo tanto $f(x,y)$ es discontinua en $(0,0)$

6.4. DIFERENCIAL TOTAL DE UNA FUNCIÓN.-

① INCREMENTO TOTAL DE UNA FUNCIÓN.-

Si $z = f(x,y)$ es una función de x e y entonces el incremento total de una función definiremos por:

$$\Delta z = \Delta f(x,y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

② DIFERENCIAL TOTAL DE UNA FUNCIÓN.-

Si $z = f(x,y)$ es una función de x e y entonces a la diferencial total de la función $z = f(x,y)$ es definida por:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} . dx + \frac{\partial z}{\partial y} . dy$$

③ APLICACIÓN DE LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN A LOS CÁLCULOS APROXIMADOS.-

Si $z = f(x,y)$ se verifica la igualdad aproximada: $\Delta z \cong dz$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \cong \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \cong f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

1831 Para la función $f(x, y) = x^2 y$, hallar el incremento total y la diferencial total en el punto (1,2) compararlo entre sí.

a) $\Delta x = 1; \Delta y = 2$

Desarrollo

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta f(1, 2) = f(1 + 1, 2 + 2) - f(1, 2)$$

$$= f(2, 4) - f(1, 2) = [(2)^2 4 - (1)^2 2] = 16 - 2 = 14 \quad \therefore \Delta f(1, 2) = 14$$

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

$$df(1, 2) = \frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(1, 2)}{\partial y} \Delta y = 2(1)2 + (1)^2 2 = 4 + 2 = 6$$

$$\text{Luego } \Delta f(1, 2) - df(1, 2) = 14 - 6 = 8 \quad \therefore \Delta f(1, 2) - df(1, 2) = 8$$

b) $\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2$

Desarrollo

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta f(1, 2) = f(1 + 0.1, 2 + 0.2) - f(1, 2) = f(1.1, 2.2) - f(1, 2)$$

$$= (1.1)^2 (2.2) - (1)^2 2 = 2.662 - 2 = 0.662 \quad \therefore \Delta f(1, 2) = 0.662$$

$$df(1, 2) = \frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(1, 2)}{\partial y} \Delta y$$

$$= 2(2)(0.1) + 1(0.2) = 0.4 + 0.2 = 0.6 \quad \therefore df(1, 2) = 0.6$$

$$\text{Luego } \Delta f(1,2) - df(1,2) = 0.662 - 0.6 = 0.062$$

$$\Delta f(1,2) - df(1,2) = 0.062$$

1832 Demostrar, que para las funciones u y v de varias variables (por ejemplo de dos) se verifican las reglas ordinarias de derivación.

a) $d(u + v) = du + dv$

b) $d(uv) = u dv + v du$

c) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad d(u + v) &= \frac{\partial(u + v)}{\partial x} dx + \frac{\partial(u + v)}{\partial y} dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) = du + dv \end{aligned}$$

En forma similar las anteriores

Hallar las diferenciales totales de las siguientes funciones:

1833 $z = x^3 + y^3 - 3xy$

Desarrollo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = (3x^2 - 3y)dx + (3y^2 - 3x)dy$$

1834 $z = x^2 y^3$

Desarrollo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy$$

1835 $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Desarrollo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \dots (1)$$

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases} \quad \dots (2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1): $dz = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} dy$

1836 $z = \text{sen}^2 x + \cos^2 y$

Desarrollo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = 2 \text{sen } x \cos x dx - 2 \cos y \text{sen } y dy$$

$$dz = \text{sen } (2x) dx - \text{sen } (2y) dy$$

1837 $z = yx^y$

Desarrollo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = y^2 x^{y-1} dx + x^y (1 + y \ln x) dy$$

1838 $z = \ln(x^2 + y^2)$

Desarrollo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$$

1839 $f(x, y) = \ln(1 + \frac{x}{y})$

Desarrollo

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

$$df(x, y) = \frac{1}{x+y} dy - \frac{x}{y(x+y)} dy$$

1840 $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

Desarrollo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

... (1)

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

... (2)

ahora reemplazando (2) en (1) se tiene: $dz = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$

1841 $z = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Desarrollo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = \frac{2}{x \operatorname{sen}\left(\frac{2y}{x}\right)} \left(dy - \frac{y}{x} dx\right)$$

1842 Hallar $df(1,1)$ si $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$

Desarrollo

$$df(1,1) = \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} dy \quad \dots (1)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = -2 \end{cases} \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $df(1,1) = dx - 2 dy$

1843 $u = xyz$

Desarrollo

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$du = yz dx + xz dy + xy dz$$

1844 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Desarrollo

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

1845 $u = (xy + \frac{x}{y})^z$

Desarrollo

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$du = (xy + \frac{x}{y})^{z-1} ((y + \frac{1}{y})z dx + (1 - \frac{1}{y^2})xz dy + (xy + \frac{x}{y}) \ln(xy + \frac{x}{y}) dz)$$

1846 $u = \arctg(\frac{xy}{z^2})$

Desarrollo

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$du = \frac{z^2}{(xy)^2 + z^4} (y dx + x dy - \frac{2xy}{z} dz)$$

1847 Hallar $df(3,4,5)$ si $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Desarrollo

$$d(3,4,5) = \frac{\partial(3,4,5)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(3,4,5)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(3,4,5)}{\partial z} dz$$

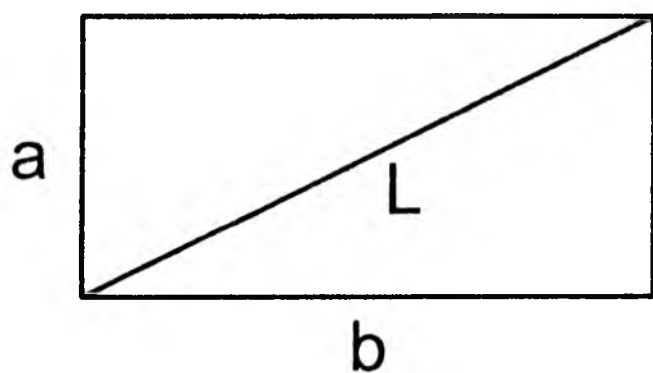
$$df(x, y, z) = -\frac{xz dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{yz dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dz$$

$$df(3,4,5) = -\frac{15}{125} dx - \frac{20}{125} dy + \frac{1}{5} dz$$

$$df(3,4,5) = \frac{1}{25} (-3 dx - 4 dy + 5 dz)$$

- 1848** Uno de los lados de un rectángulo es $a = 10$ cm, el otro $b = 24$ cm ¿Cómo variara la diagonal L de este rectángulo si el lado a se alarga 4 mm y el lado b se acorta 1 mm? Hallar la magnitud aproximada de la variación y compararla con la exacta.

Desarrollo



Por Pitágoras se tiene: $L = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial a} da + \frac{\partial L}{\partial b} db \quad \text{donde } a = 10 \text{ cm}$$

$$b = 24 \text{ cm}, da = 0.4 \text{ cm}, db = -0.1 \text{ cm}$$

$$dL = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} da + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} db = \frac{10}{\sqrt{100 + 576}} (0.4) + \frac{24}{\sqrt{100 + 576}} (0.1)$$

$$dL = \frac{4}{26} - \frac{2.4}{26} = \frac{1.6}{26} \cong 0.062 \text{ cm}$$

$$\Delta L = \sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2} - \sqrt{a^2 + b^2} = 0.065 \text{ cm}$$

- 1849** Una caja cerrada, cuyas dimensiones exteriores son de 10 cm, 8 cm y 6 cm; esta hecha de madera contrachapada de 2 mm de espesor. Determinar el volumen aproximado del material que se gastó en hacer la caja.

Desarrollo

Sean x, y, z las dimensiones de la caja, luego el volumen de la caja es:

$V = xyz$, además $x = 10$ cm, $y = 8$ cm, $z = 6$ cm y $dx = dy = dz = 0.4$ cm

$$dv = yz dx + xz dy + xy dz = (8)(6)(0.4) + (10)(6)(0.4) + (10)(8)(0.4)$$

$$= (48 + 60 + 80)(0.4) = 188(0.4) = 75.2 \text{ cm}^3$$

$dV = 75.2 \text{ cm}^3$ con relación a las dimensiones anteriores.

- 1850** El ángulo central de un sector circular es igual a 80° y se desea disminuirlo en 1° ¿En cuánto hay que alargar el radio del sector, para que su área no varíe, si su longitud inicial era igual a 20 cm?

Desarrollo

área del sector circular $A = \frac{\pi r^2 x}{360^\circ}$, donde

$r = 20$ cm, es el radio y $x = \text{ángulo central} = 80^\circ$, $dx = -1^\circ$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial r} dr \Rightarrow dA = \frac{\pi r^2}{360} dx + \frac{2\pi xr}{360} dr$$

$dA = r^2 dx + xr dr$ reemplazando se tiene:

$$0 = \frac{20^2(-1)}{2} + 20(80)dr \Rightarrow 1600 dr = 200$$

$dr = \frac{200}{1600} = \frac{1}{8} \Rightarrow dr = \frac{1}{8}$ es lo que debe alargarse el radio para que el área no varíe.

1851 Calcular aproximadamente:

a) $(1.02)^3 \cdot (0.97)^2$

b) $\sqrt{(4.05)^2 + (2.93)^2}$

c) $\sin 32^\circ \cos 59^\circ$ (al convertir los grados en radianes y cuando se calcule el $\sin 60^\circ$, tomar solamente tres cifras decimales; la última cifra debe redondearse)

Desarrollo

a) Sea $f(x, y) = x^3 y^2$ donde $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.02, \Delta y = -0.03$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \cong f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$$

$$f(1.02, 0.97) \cong f(1, 1) + \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} (0.02) + \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} (-0.03)$$

$$(1.02)^3 (0.97)^2 \cong 1 + 3(1)(0.02) - 2(1)(0.03)$$

$$\cong 1 + 0.06 - 0.06 = 1$$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ donde $x = 4, y = 3, \Delta x = 0.05, \Delta y = -0.07$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \cong f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$$

$$f(4.05, 2.93) \cong f(4, 3) + \frac{\partial f(4, 3)}{\partial x} (0.05) + \frac{\partial f(4, 3)}{\partial y} (-0.07)$$

$$\sqrt{(4.05)^2 + (2.93)^2} \cong 5 + \frac{4}{5}(0.05) + \frac{3}{5}(-0.07) = 4.998$$

$$\therefore \sqrt{(4.05)^2 + (2.93)^2} \cong 4.998$$

- 1852** Demostrar, que el error relativo de un producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.

Desarrollo

Consideremos $z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n$ producto de números positivos, entonces

$$\ln z = \ln(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \dots + \ln x_n$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \frac{dx_3}{x_3} + \dots + \frac{dx_n}{x_n} \text{ de donde}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3} + \dots + \frac{\Delta x_n}{x_n}, \text{ donde } \frac{\Delta z}{z} \text{ es el error relativo de un}$$

producto y $\frac{\Delta x_1}{x_1}, \frac{\Delta x_2}{x_2}, \frac{\Delta x_3}{x_3}, \dots, \frac{\Delta x_n}{x_n}$ son los errores relativos de los factores, por

lo tanto el error relativo de un producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.

- 1853** Al medir en un lugar el triangulo ABC, se obtuvieron los datos siguientes: el lado $a = 100\text{m} \pm 2\text{m}$ el lado $b = 200\text{m} \pm 3\text{m}$ y el ángulo $c = 60^\circ \pm 1^\circ$ ¿Con que grado de exactitud puede calcularse el lado c?

Desarrollo

Por la ley de los cosenos se tiene que:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}, \text{ la exactitud que puede calcularse el lado c es de}$$

de donde $dc = \frac{\partial c}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial c}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial c}{\partial C} \Delta C$

$$dc = \frac{a - b \cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}} \Delta a + \frac{b - a \cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}} \Delta b + \frac{ab \sin C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}} \Delta C$$

reemplazando los valores para $a = 100\text{m}$, $b = 200\text{m}$, $C = 60^\circ$, $\Delta a = 2$, $\Delta b = 3$, $\Delta C = 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$, $dc \cong 4.25 \text{ m}$

1854 El periodo T de oscilación del péndulo se calcula por la fórmula $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$,

donde L es la longitud del péndulo y g , la aceleración de la gravedad. Hallar el error que se comete al determinar T , como resultado de los pequeños errores $\Delta L = \alpha$, $\Delta g = \beta$ cometidos al medir L y g .

Desarrollo

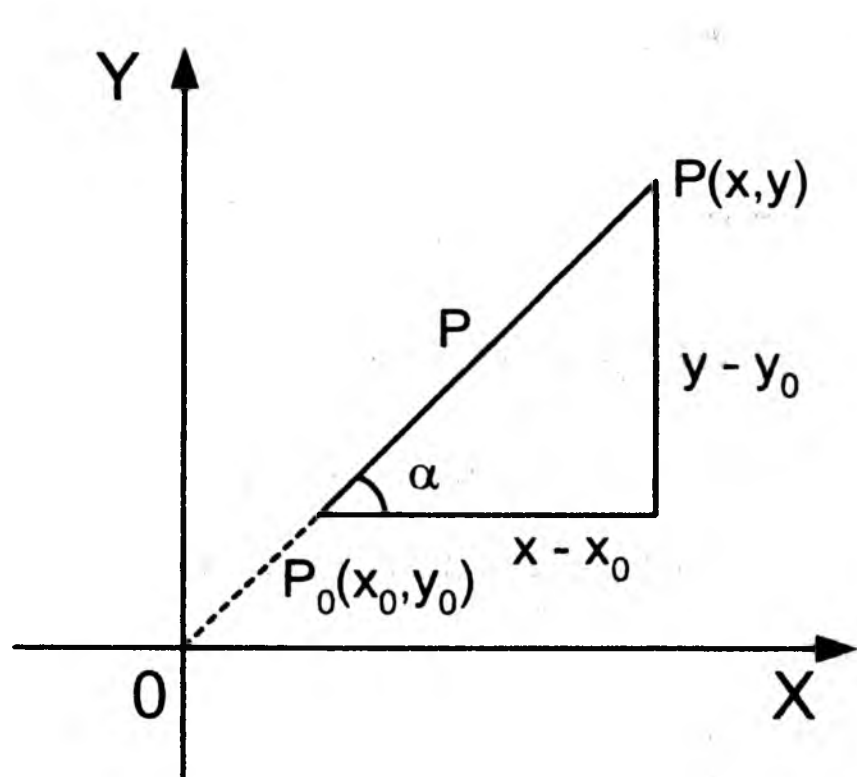
El error que se comete al determinar T es:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial L} \Delta L + \frac{\partial T}{\partial g} \Delta g \Rightarrow dT = \frac{\pi}{\sqrt{gL}} \alpha - \frac{\pi \sqrt{L}}{g \sqrt{g}} \beta = \frac{\pi(g\alpha - L\beta)}{g \sqrt{gL}}$$

$$\therefore dT = \frac{\pi(g\alpha - L\beta)}{g \sqrt{gL}}$$

1855 La distancia entre los puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P(x, y)$ es igual a ρ , y el ángulo formado por el vector $\overrightarrow{P_0P}$ con el eje OX , es igual a α . ¿En cuánto variará el ángulo α , si el punto P toma la posición $P_1(x + dx, y + dy)$, mientras que el punto P_0 sigue invariable?

Desarrollo



$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{x - x_0}{\rho} \\ \text{sen } \alpha = \frac{y - y_0}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \alpha = x - x_0 \\ \rho \text{ sen } \alpha = y - y_0 \end{cases}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{diferenciando}$$

$$\sec^2 \alpha \cdot d\alpha = \frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2}$$

pero del gráfico se tiene $\text{sen } \alpha = \frac{\rho}{x - x_0}$

$$\frac{\rho^2}{(x - x_0)^2} d\alpha = \frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2}$$

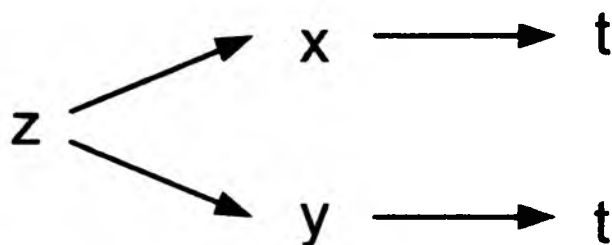
$$d\alpha = \frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{\rho^2} \Rightarrow d\alpha = \frac{\cos \alpha dy - \text{sen } \alpha dx}{\rho}$$

6.5. DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS.-

① CASO DE UNA SOLA VARIABLE INDEPENDIENTE.-

Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable en x e y , y a la vez funciones diferenciables de una variable independiente t : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, la diferenciación de la función compuesta $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ se puede calcular por la fórmula:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

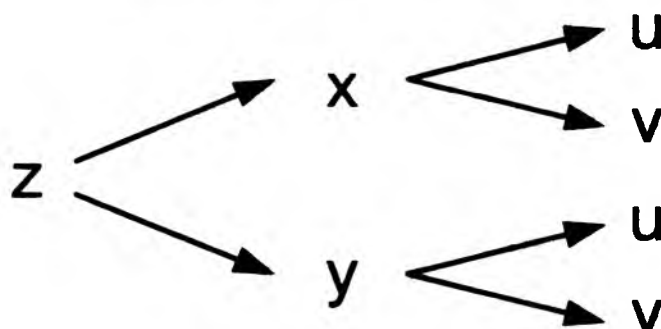


② CASO DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES.-

Si z es una función compuesta de varias variables independientes tal como $z = f(x, y)$, donde $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, las derivadas parciales de z con respecto a u y v se expresa así:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$



1856 Hallar $\frac{dz}{dt}$ si $z = \frac{x}{y}$, donde $x = e^t$, $y = \ln t$

Desarrollo

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{de donde} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{e^t}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{e^t}{\ln t} - \frac{e^t}{t \ln^2 t}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{e^t}{t \ln^2 t} (t \ln t - 1)$$

1857 Hallar $\frac{du}{dt}$, si $u = \ln \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$, donde $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$

Desarrollo

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{de donde se tiene:}$$

$$\frac{du}{dt} = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot 6t - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) \left(\frac{x}{y\sqrt{y}}\right) \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{t}{\sqrt{y}} \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) \left(6 - \frac{x}{2y^2}\right)$$

1858 Hallar $\frac{du}{dt}$, si $u = xyz$, donde $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$

Desarrollo

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \quad \text{de donde} \quad \frac{du}{dt} = yz2t + \frac{xz}{t} + xy \sec^2 t$$

$$\frac{du}{dt} = 2t \operatorname{tg} t \ln t + \frac{t^2 + 1}{t} \cdot \operatorname{tg} t + (t^2 + 1) \ln t \cdot \sec^2 t$$

1859 Hallar $\frac{du}{dt}$, si $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, donde $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = H$

Desarrollo

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (-R \sin t) - \frac{yz}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (R \cos t) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (0)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{HR^2 \cos t \sin t}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{HR^2 \sin t \cos t}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + 0 = 0 \quad \therefore \frac{du}{dt} = 0$$

- 1860** Hallar $\frac{dz}{dx}$ si $z = u^v$, donde $u = \operatorname{sen} x$, $v = \cos x$

Desarrollo

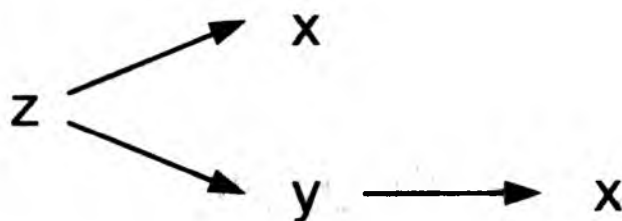
$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} = vu^{v-1} \cos x + u^v \ln u (-\operatorname{sen} x) \\ &= \cos^2 (\operatorname{sen} x)^{\cos x - 1} - (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \operatorname{sen} x \cdot \ln (\operatorname{sen} x)\end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dx} = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} [\cos x \cdot \operatorname{ctg} x - \operatorname{sen} x \cdot \ln \operatorname{sen} x]$$

- 1861** Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$ e $y = x^2$

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x})}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$



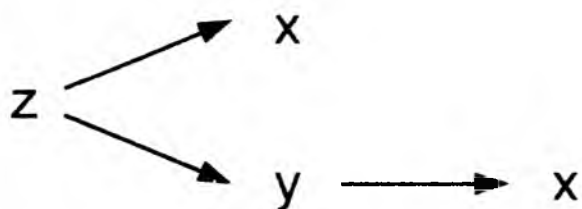
$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{de donde} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2 - y}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{2x^2 - y}{x^2 + y^2}$$

- 1862** Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$ si $z = x^y$ donde $y = \varphi(x)$

Desarrollo

$$z = x^y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$$

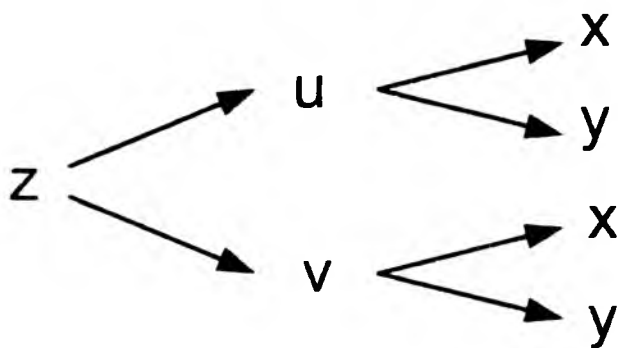


$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{de donde} \quad \frac{dz}{dx} = yx^{y-1} + x^y \ln x \cdot \varphi'(x)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = x^y \left[\frac{y}{x} + \varphi'(x) \ln x \right]$$

1863 Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z = f(u, v)$, donde $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$

Desarrollo

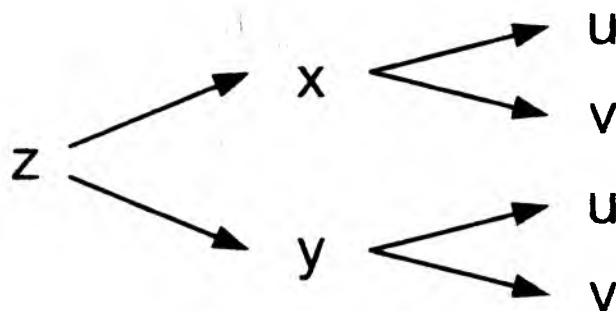


$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{de donde} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_u(u, v) + ye^{xy} f'_v(u, v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{de donde} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_u(u, v) + xe^{xy} f'_v(u, v)$$

1864 Hallar $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ si $z = \arctg \frac{x}{y}$, donde $x = u \sin v$, $y = u \cos v$

Desarrollo



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{x^2 + y^2} \operatorname{sen} v - \frac{x}{x^2 + y^2} \cos v = \frac{u \operatorname{sen} v \cos v}{x^2 + y^2} - \frac{u \operatorname{sen} v \cos v}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

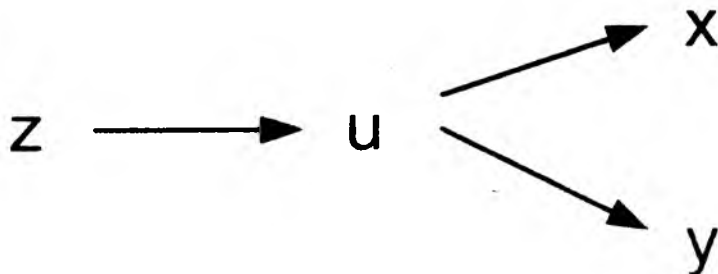
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y}{x^2 + y^2} u \cos v + \frac{x}{x^2 + y^2} u \operatorname{sen} v = \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial v} = 1$$

1865 Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $z = f(u)$ donde $u = xy + \frac{y}{x}$

Desarrollo



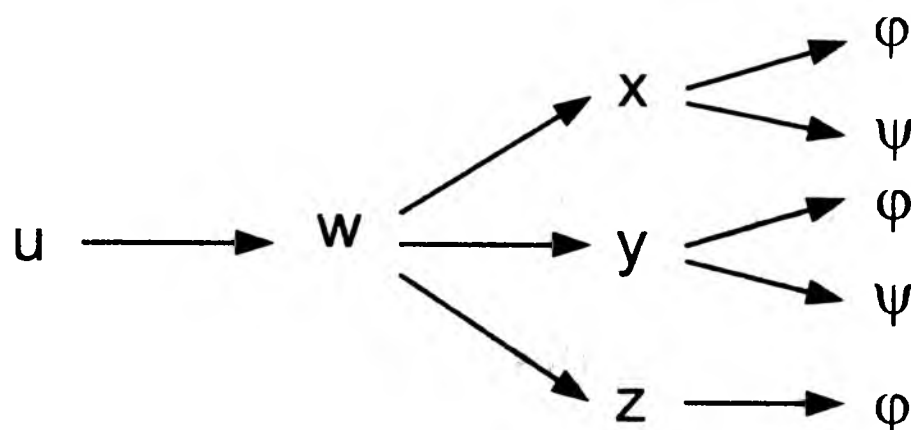
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot \left(y - \frac{y}{x^2}\right) \text{ de donde } \frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(xy + \frac{y}{x}\right) y \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \text{de donde} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f' \left(xy + \frac{y}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

1866 Demostrar que si $u = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$ donde $x = R \cos \varphi \cos \psi$, $y = R \cos \varphi \sin \psi$, $z = R \sin \varphi$ entonces $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial \psi} = 0$

Desarrollo

Sea $w = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow u = \phi(w)$



$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \phi'(w) 2x(-R \sin \varphi \cos \psi) + \phi'(w) 2y(-R \sin \varphi \sin \psi) + \phi'(w) 2z R \cos \varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \phi'(w) 2R(-x \sin \varphi \cos \psi - y \sin \varphi \sin \psi + z \cos \varphi)$$

$$= 2R \phi'(w) [-R \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \psi - R \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \psi + R \sin \varphi \cos \varphi]$$

$$= 2R^2 \phi'(w) [-\sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) + \sin \varphi \cos \varphi]$$

$$= 2R^2 \phi'(w) [-\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi] = 2R^2 \phi'(w) (0) = 0 \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \phi'(w) 2x(-R \cos \varphi \operatorname{sen} \psi) + \phi'(w) 2y R \cos \varphi \cos \psi$$

$$= 2R\phi'(w)(-x \cos \varphi \operatorname{sen} \psi + y \cos \varphi \cos \psi)$$

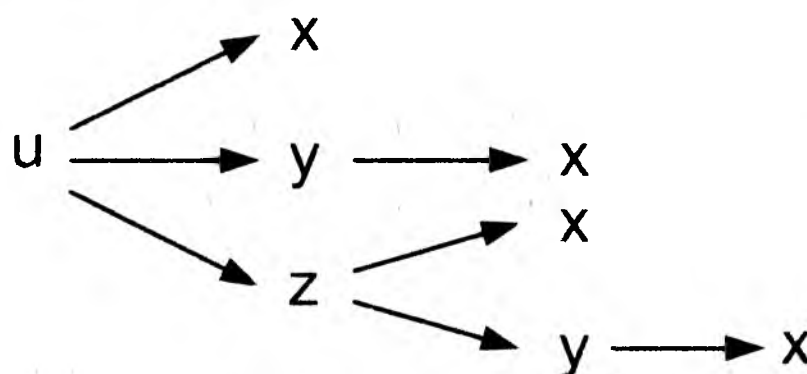
$$= 2R\phi'(w)[-R \cos^2 \varphi \cos \psi \operatorname{sen} \psi + R \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \psi \cos \psi]$$

$$= 2R\phi'(w)(0) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0$$

1867 Hallar $\frac{du}{dx}$ si $u = f(x, y, z)$ donde $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x, y)$

Desarrollo



$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{de donde} \quad \frac{dz}{dx} = \psi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y) \cdot \varphi'(x)$$

$$\frac{du}{dx} = f'_x(x, y, z) + f'_y(x, y, z) \cdot \varphi'(x) + f'_z(x, y, z) [\psi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y) \cdot \varphi'(x)]$$

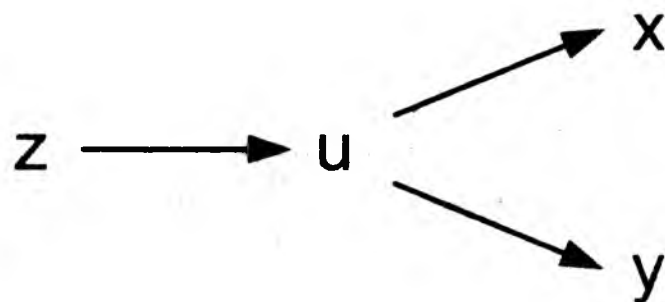
1868 Demostrar, que si $z = f(x + ay)$, donde f es una función diferenciable, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}$$

Desarrollo

$$\text{Sea } u = x + ay \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = a$$

$$z = f(u) \text{ donde } u = x + ay$$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = af'(u)$$

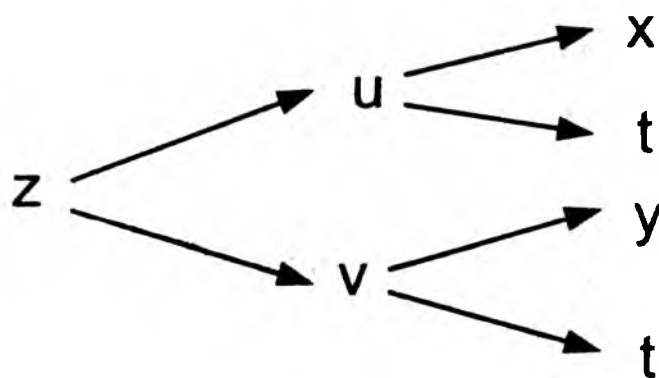
$$a \frac{\partial z}{\partial x} = af'(u) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}$$

1869 Demostrar que la función $w = f(u,v)$ donde $u = x + at$, $v = y + bt$, satisfacen a

$$\text{la ecuación } \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y}$$

Desarrollo



$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial u} + b \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial u} + b \frac{\partial w}{\partial v} \quad \dots (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial v} \end{cases} \quad \dots (2)$$

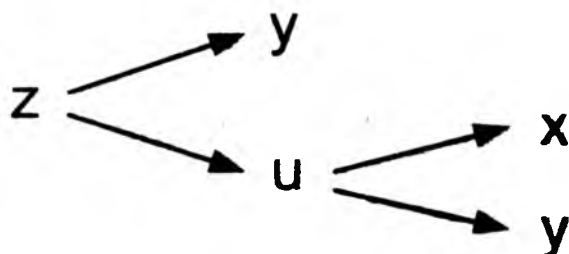
reemplazando (2) en (1) se tiene: $\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y}$

1870 Demostrar que la función $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ satisface a la ecuación

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

Desarrollo

$z = y \varphi(u)$ donde $u = x^2 - y^2$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy\varphi'(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(u) - 2y^2\varphi'(u)$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} (2xy\varphi'(u)) + \frac{1}{y} (\varphi(u) - 2y^2\varphi'(u))$$

$$= 2y\varphi'(u) + \frac{\varphi(u)}{y} - 2y\varphi'(u) = \frac{\varphi(u)}{y} = \frac{z}{y^2} \quad \text{donde } \varphi(u) = \frac{z}{y}$$

$$\therefore \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

1871 Demostrar, que la función $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface a la ecuación

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

Desarrollo

$$z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x\left(y + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right) + y\left(x + \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$= xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - y\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + xy + y\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = xy + (xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)) = xy + z$$

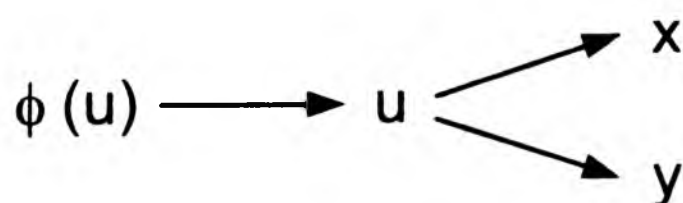
$$\therefore x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

1872 Demostrar, que la función $z = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ satisface a la ecuación

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$$

Desarrollo

Sea $z = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) = e^y \varphi(u)$ donde $u = ye^{\frac{x^2}{2y^2}}$



Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial \phi(u)}{\partial x} = \frac{\partial \phi(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{donde} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$\frac{\partial \phi(u)}{\partial x} = \frac{\partial \phi(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}} \phi'(u)$$

$$\frac{\partial \phi(u)}{\partial y} = \frac{\partial \phi(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{donde} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{x^2}{2y^2}} - \frac{x^2}{y^2} e^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$\frac{\partial \phi(u)}{\partial y} = \frac{\partial \phi(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{\frac{x^2}{2y^2}} - \frac{x^2}{y^2} e^{\frac{x^2}{2y^2}} \right) \phi'(u), \quad \text{como } z = e^y \phi(u), \text{ entonces}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y \frac{\partial \phi(u)}{\partial x} = \frac{x}{y} e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \phi'(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y \phi(u) + e^y \frac{\partial \phi(u)}{\partial y} = e^y \phi(u) + e^y \left(e^{\frac{x^2}{2y^2}} - \frac{x^2}{y^2} e^{\frac{x^2}{2y^2}} \right) \phi'(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y \phi(u) + e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \phi'(u) - \frac{x^2}{y^2} e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \phi'(u)$$

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^3 e^y}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}} \phi'(u) - x y e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \phi'(u) \quad \dots (1)$$

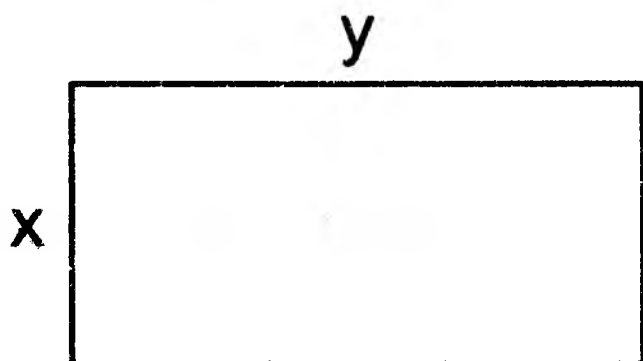
$$x y \frac{\partial z}{\partial y} = x y e^y \phi(u) + x y e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \phi'(u) - \frac{x^3}{y} e^y e^{\frac{x^2}{2y^2}} \phi'(u) \quad \dots (2)$$

sumando (1) y (2) se tiene: $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xye^y \phi(u) = xyz$

$$\therefore (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$$

- 1873** Un lado de un rectángulo de $x = 20$ m, aumenta con una velocidad de 5m/s, el otro lado de $y = 30$ m, disminuye con una velocidad de 4m/s ¿Con qué velocidad variarían el perímetro y el área de dicho rectángulo?

Desarrollo



El perímetro del rectángulo es:

$P = 2x + 2y$ además se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = -4 \text{ m / seg} , \quad \frac{dx}{dt} = 5 \text{ m / seg}$$

la velocidad con que varía el perímetro es:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2(5) + 2(-4) = 2 \text{ m / seg}$$

por otra parte el área = $A = xy$; la velocidad de variación del área es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = y(5) - 4(x), \quad \text{para } x = 20, y = 30 \text{ se tiene:}$$

$$\frac{dA}{dt} = 30(5) - 4(20) = 150 - 80 = 70 \quad \therefore \frac{dA}{dt} = 70 \text{ m}^2 / \text{seg}$$

- 1874** Las ecuaciones del movimiento de un punto material son $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ ¿Con qué velocidad aumentara la distancia desde el punto al origen de coordenadas?

Desarrollo

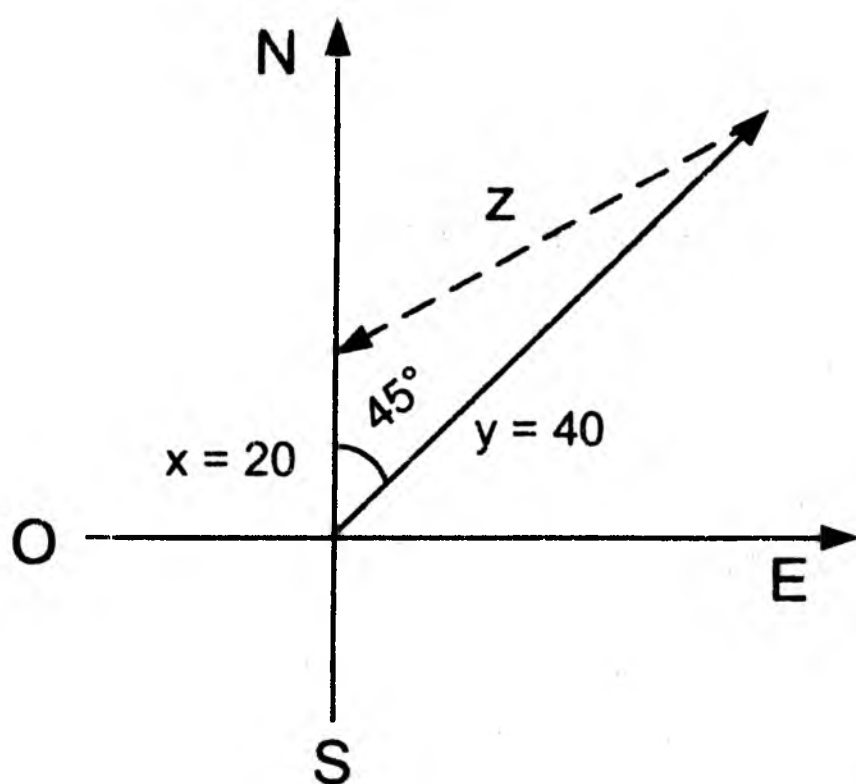
La distancia del punto (0,0,0) al punto P(x,y,z) es:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{t^2 + t^4 + t^6}$, ahora calculamos la velocidad con que aumenta la distancia del origen al punto P

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1 + 2t^2 + 3t^4}{\sqrt{1 + t^2 + t^3}}$$

- 1875** Dos barcos, que salieron al mismo tiempo del punto A, va uno hacia el norte y el otro hacia el nor - este. Las velocidades de dichos barcos son 20km/hr, 40km/hr, respectivamente. Con que velocidad aumenta la distancia entre ellos.

Desarrollo



Por la ley de los cosenos tenemos que:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos 45^\circ}$$

reemplazando valores se tiene:

$$z = \sqrt{20^2 + 40^2 - 2(20)(40)\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$z = 20\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$$

6.6. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DADA Y GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN.-

① DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UNA DIRECCIÓN DADA.-

La derivada de una función $z = f(x,y)$ en una dirección dada $\ell = \overrightarrow{P_1P}$ se define por:

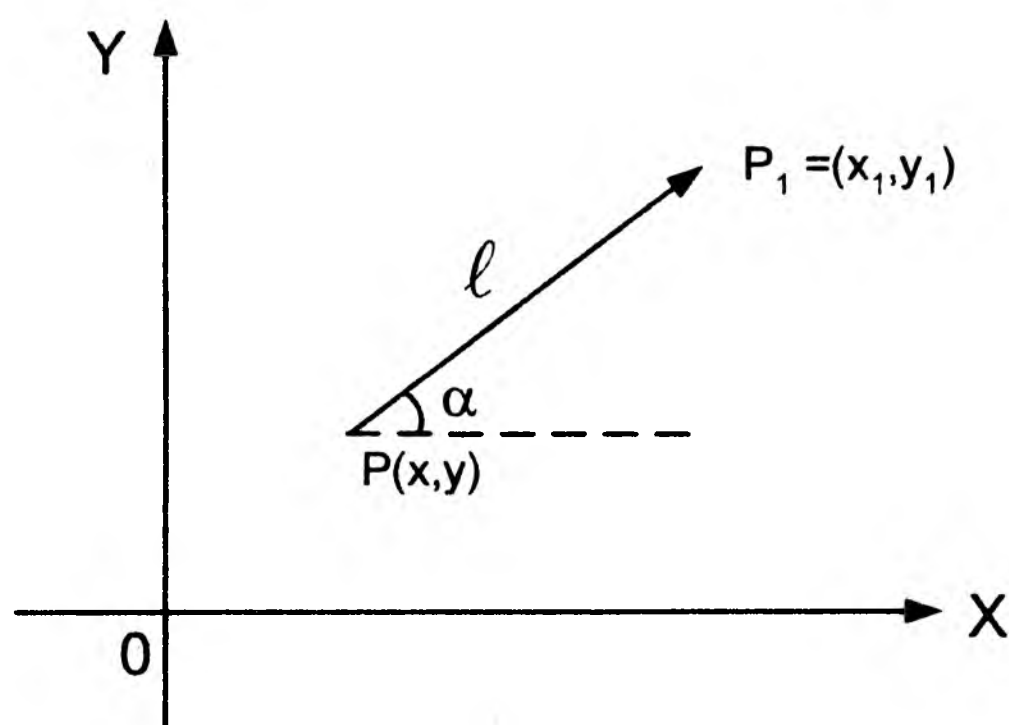
$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \lim_{P_1 P \rightarrow 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{P_1 P}$$

donde $f(P)$ y $f(P_1)$ son los valores de la función en los puntos P y P_1 .

Si la función z es diferenciable, se verifica la fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha$$

donde α es el ángulo formado por el vector $\ell = \overrightarrow{P_1 P}$ con el eje X



En forma similar para función $u = f(x, y, z)$ se verifica la relación

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

donde α , β y γ son los ángulos entre $\ell = \overrightarrow{PP_1}$ y los ejes coordenados.

② GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN.-

Se da el nombre de gradiente de una función $z = f(x, y)$ a un vector, cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados son sus derivadas parciales de dicha función:

$$\text{grad}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$$

La derivada de la función en la dirección ℓ , esta relacionada con el gradiente de la misma función mediante la fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \text{proy}_{\ell}^{(\text{grad}(z))}$$

La dirección del gradiente de la función en un punto dado, es la dirección de la velocidad máxima de crecimiento de la función en este punto, es decir: cuando

$\ell = \text{grad}(z)$, la derivada $\frac{\partial z}{\partial \ell}$ toma su valor máximo igual a: $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$

En forma similar para una función $u = f(x, y, z)$ se tiene:

$$\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

EL gradiente de una función de tres variables, en cada punto lleva la dirección de la normal a la superficie de nivel que pasa por dicho punto.

- 1876** Hallar la derivada de la función $z = x^2 - xy - 2y^2$ en el punto $P(1,2)$ y en la dirección que forma con el eje X un ángulo de 60° .

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos 60^\circ + \frac{\partial z}{\partial y} \sin 60^\circ$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \ell} = (2x - y) \frac{1}{2} + (-x + 4y) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial \ell} = (2-2)\frac{1}{2} + (-1+8)\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{7\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\partial f(1,2)}{\partial \ell} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

- 1877** Hallar la derivada de la función $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ en el punto M(1,2) en la dirección que va desde este al punto N(4,6).

Desarrollo

Se tiene $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha = (3x^2 - 4xy + y^2) \cos \alpha + (-2x^2 + 2xy) \sin \alpha$$

calculando en el punto M(1,2)

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = (3 - 8 + 4)\frac{3}{5} + (-2 + 4)\frac{4}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \ell} = 1$$

- 1878** Hallar la derivada de la función $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto P(1,1) en la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado.

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos 45^\circ + \frac{\partial z}{\partial y} \sin 45^\circ = \frac{x}{x^2 + y^2} \cos 45^\circ + \frac{y}{x^2 + y^2} \sin 45^\circ$$

calculando en el punto P(1,1) se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- 1879** Hallar la derivada de la función $u = 3x^2 - 3yz + 5$ en el punto M(1,2,-1) en la dirección que forma ángulos iguales con los ejes coordenados.

Desarrollo

Se conoce que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Pero como $\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = 2x \cos \alpha - 3z \cos \beta - 3y \cos \alpha$$

calculando en el punto M(1,2,-1)

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{6\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{6\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial \ell} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 1880** Hallar la derivada de la función $u = xy + yz + xz$ en el punto M(2,1,3) en la dirección que va desde el punto N(5,5,15)

Desarrollo

Como $\cos \alpha = \frac{3}{13}$, $\cos \beta = \frac{4}{13}$, $\cos \gamma = \frac{12}{13}$

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = (y + z) \cos \alpha + (x + z) \cos \beta + (y + x) \cos \gamma$$

calculando en el punto M(2,1,3) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = 4\left(\frac{3}{13}\right) + 5\left(\frac{4}{13}\right) + 3\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{68}{13} \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{68}{13}$$

- 1881** Hallar la derivada de la función $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ en el origen de coordenadas, en la dirección que forma con los ejes de coordenadas x, y, z los ángulos α , β y γ , respectivamente.

Desarrollo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial \ell} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial \ell} \cos \gamma \\ &= \frac{e^x}{e^x + e^y + e^z} \cos \alpha + \frac{e^y}{e^x + e^y + e^z} \cos \beta + \frac{e^z}{e^x + e^y + e^z} \cos \gamma\end{aligned}$$

calculando en el punto (0,0,0) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{\cos \beta}{3} + \frac{\cos \gamma}{3} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3}$$

1882 El punto en que la derivada de una función, en cualquier dirección, es igual a cero, se llama punto estacionario de esta función. Hallar los puntos estacionarios de las siguientes funciones.

a) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$

Desarrollo

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 4 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow p(2,0)$$

b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

Desarrollo

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P_1(0,0) \\ P_2(1,1) \end{matrix}$$

c) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$

Desarrollo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -y + 2 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 4y - z - x = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow p(7, 2, 1)$$

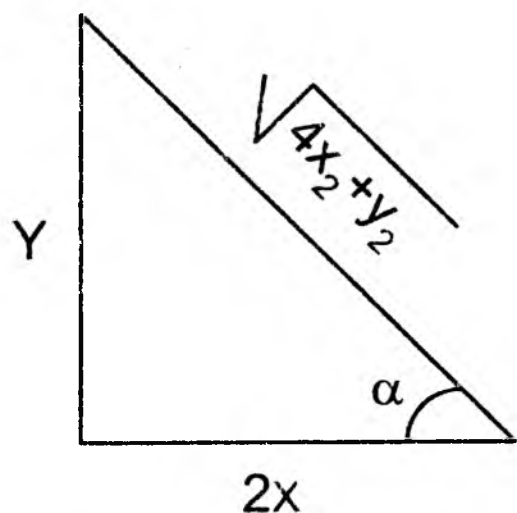
- 1883** Demostrar que la derivada de la función $z = \frac{y^2}{x}$, tomada en cualquier punto de la elipse $2x^2 + y^2 = c^2$ a lo largo de la normal de la misma, es igual a cero.

Desarrollo

$$2x^2 + y^2 = c^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y} = \operatorname{tg} \theta$$

$$m_{L_t} = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y} = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow m_{L_t} = \operatorname{tg} \theta \text{ de donde } m_{L_N} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

$$m_{L_N} = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = -\left(-\frac{1}{\frac{2x}{y}}\right) = \frac{y}{2x} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{2x}$$



$$\cos \alpha = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = -\frac{y^2}{x^2} \left(-\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + y^2}}\right) + \frac{2y}{x} \left(\frac{y}{\sqrt{4x^2 + y^2}}\right)$$

$$= -\frac{2y^2}{x\sqrt{4x^2 + y^2}} + \frac{2y^2}{x\sqrt{4x^2 + y^2}} = 0 \quad \therefore \frac{\partial z}{\partial \ell} = 0$$

1884 Hallar el $\text{grad}(z)$ en el punto $(2,1)$ si $z = x^3 + y^3 - 3xy$

Desarrollo

$$\text{grad}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}, \text{ calculando se tiene:}$$

$$\text{grad}(z) = (3x^2 - 3y) \vec{i} + (3y^2 - 3x) \vec{j} \text{ en } (2,1)$$

$$\text{grad}(z) = 9 \vec{i} + (-3) \vec{j} = 9 \vec{i} - 3 \vec{j}$$

1885 Hallar el $\text{grad}(z)$ en el punto $(5,3)$ si $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

Desarrollo

$$\text{grad}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$$

$$\text{grad}(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \vec{j} \text{ en } (5,3)$$

$$\text{grad}(z) = \frac{5}{4} \vec{i} - \frac{3}{4} \vec{j} = \frac{1}{4} (5 \vec{i} - 3 \vec{j})$$

1886 Hallar el $\text{grad}(u)$ en el punto $(1,2,3)$, si $u = xyz$

Desarrollo

$$\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{grad}(u) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k} \quad \text{en } (1,2,3)$$

$$\text{grad}(u) = 6 \vec{i} + 3 \vec{j} + 2 \vec{k}$$

- 1887** Hallar la magnitud y la dirección del $\text{grad}(u)$ en el punto $(2,-2,1)$ si $u = x^2 + y^2 + z^2$

Desarrollo

$$\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{grad}(u) = 2x \vec{i} + 2y \vec{j} + 2z \vec{k} \quad \text{en } (2,-2,1)$$

$$\text{grad}(u) = 4 \vec{i} - 4 \vec{j} + 2 \vec{k}, \text{ su magnitud es: } |\text{grad}(u)| = \sqrt{16+16+4} = 6$$

ahora encontraremos los cosenos directores

$$\cos \alpha = \frac{4}{6}, \quad \cos \beta = -\frac{4}{6}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}$$

$$\text{es decir: } \cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}$$

- 1888** Hallar el ángulo entre los gradientes de la función $z = \ln \frac{y}{x}$ en los puntos

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ y } B(1,1).$$

Desarrollo

$$\text{grad}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = -\frac{1}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j}$$

calculando en los puntos A y B se tiene:

$$\text{grad}(z) = -2 \vec{i} + 4 \vec{j}, \quad \text{grad}(z) = -\vec{i} + \vec{j}$$

$$\cos \alpha = \frac{(-2, 4) \cdot (-1, 1)}{\sqrt{4+16} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{2+4}{\sqrt{20} \sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{40}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

- 1889** Hallar la magnitud de la elevación máxima de la superficie $z = x^2 + 4y^2$ en el punto $(2, 1, 8)$.

Desarrollo

$$\text{grad}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} \Rightarrow \text{grad}(z) = 2x \vec{i} + 8y \vec{j} \text{ en } (2, 1, 8)$$

$$\text{grad}(z) = 4 \vec{i} + 8 \vec{j}$$

La magnitud de la elevación máxima es:

$$\text{tg} \theta = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{16 + 64} \cong 8.944 \text{ es decir:}$$

$$\theta = \arctg(8.944) \cong 83^\circ 37'$$

- 1890** Construir el campo vectorial del gradiente de las siguientes funciones.

a) $z = x + y$

Desarrollo

$$\text{grad}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = \vec{i} + \vec{j}$$

Luego el campo vectorial es el vector normal a la superficie $z = x + y$

b) $z = xy$

Desarrollo

$$\text{grad}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = y \vec{i} + x \vec{j}$$

Luego el campo vectorial es una familia de vectores normales a la superficie $z = xy$ en el punto $P(x,y)$.

c) $z = x^2 + y^2$

Desarrollo

$\text{grad}(z) = 2x \vec{i} + 2y \vec{j}$, luego el campo vectorial es una familia de vectores normales a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $P(x,y)$

6.7. DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE ORDENES SUPERIORES.-

① DERIVADAS PARCIALES DE ORDENES SUPERIORES.-

Se llaman derivadas parciales de segundo orden de una función $z = f(x,y)$ a las derivadas parciales de sus derivadas parciales de primer orden.

Para designar las derivadas de segundo orden se emplean las siguientes notaciones.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \text{ etc}$$

análogamente se determinan y se designan las derivadas parciales de orden superior al segundo.

Si las derivadas parciales que hay que calcular son continuas, el resultado de la derivación no depende del orden de dicha derivación.

② DIFERENCIALES DE ORDENES SUPERIORES.-

Recibe el nombre de diferenciables de segundo orden de una función $z = f(x,y)$, la diferencial de la diferencial de primer orden de dicha función:

$$d^2 z = d(dz)$$

y en general

$$d^n z = d(d^{n-1} z)$$

Si $z = f(x,y)$, donde x e y son variables independientes y la función f tiene derivadas parciales continuas de segundo grado, la diferencial de 2do orden de la función $z = f(x,y)$ se calcula por la fórmula:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \quad \dots (1)$$

En general, cuando existen las correspondientes derivadas se verifica la fórmula simbólica

$$d^n z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n z$$

Que formalmente se desarrolla según la ley binomial.

Si $z = f(x,y)$, donde los argumentos x e y son a su vez funciones de una o varias variables independientes, tendremos:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y \quad \dots (2)$$

Si x e y son variables independientes, $d^2x = 0$, $d^2y = 0$ y la fórmula (2) se hace equivalente a la fórmula (1)

1891 Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si: $z = c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$

Desarrollo

$$z = c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = \frac{c}{ab} \sqrt{b^2 x^2 + a^2 y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{cbx}{a \sqrt{b^2 x^2 + a^2 y^2}} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{abcy^2}{(b^2 x^2 + a^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{bcx}{a \sqrt{b^2 x^2 + a^2 y^2}} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-abcxy}{(b^2 x^2 + a^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{acy}{b \sqrt{b^2 x^2 + a^2 y^2}} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{abcx^2}{(b^2 x^2 + a^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1892 Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ si $z = \ln(x^2 + y)$

Desarrollo

$$z = \ln(x^2 + y) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y)^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2 + y)^2} \end{cases}$$

1893 Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si $z = \sqrt{2xy + y^2}$

Desarrollo

$$z = \sqrt{2xy + y^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{2xy + y^2}} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

1894 Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si $z = \arctg\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

Desarrollo

$$z = \arctg\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

1895 Hallar $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$, si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Desarrollo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} \quad \therefore \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

1896 Hallar todas las derivadas parciales de segundo orden de la función $u = xy + yz + zx$

Desarrollo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + z \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y + x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 1$$

1897 Hallar $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, si $u = x^\alpha y^\beta z^\gamma$

Desarrollo

$$u = x^\alpha y^\beta z^\gamma \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \alpha \beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^\gamma$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \alpha \beta \gamma x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}$$

1898 Hallar $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, si $z = \sin xy$

Desarrollo

$$z = \sin xy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y \cos xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos xy - xy \sin xy$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -x \operatorname{sen} xy - x \operatorname{sen} x - x^2 y \cos xy$$

$$\therefore \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -2x \operatorname{sen} xy - x^2 y \cos xy$$

1899 Hallar $f''_{xx}(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yy}(0,0)$ si $f(x,y) = (1+x)^m (1+y)^n$

Desarrollo

$$f'_x(x,y) = m(1+x)^{m-1}(1+y)^n \Rightarrow f''_{xx}(x,y) = m(m-1)(1+x)^{m-2}(1+y)^n$$

$$f''_{xx}(0,0) = m(m-1)$$

$$f''_{xy}(x,y) = mn(1+x)^{m-1}(1+y)^{n-1} \Rightarrow f''_{xy}(0,0) = mn$$

$$f'_y(x,y) = n(1+x)^m(1+y)^{n-1} \Rightarrow f''_{yy}(x,y) = n(n-1)(1+x)^m(1+y)^{n-2}$$

$$f''_{yy}(0,0) = n(n-1)$$

1900 Demostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, si $z = \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{x-y}{x}}$

Desarrollo

$$z = \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{x-y}{x}} \Rightarrow \operatorname{sen} z = \sqrt{\frac{x-y}{x}} = \sqrt{1 - \frac{y}{x}}$$

$$\cos z \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2x\sqrt{x}\sqrt{x-y}} \text{ pero } \cos z = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2x\sqrt{x}\sqrt{x-y}\cos z} = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{y}{x-y}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{y}(x-y)^{\frac{3}{2}}} \quad \dots (1)$$

$$\text{sen } z = \sqrt{1 - \frac{y}{x}} \Rightarrow \cos z \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-y}\cos y} = -\frac{1}{2\sqrt{y}\sqrt{x-y}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{4\sqrt{y}(x-y)^{\frac{3}{2}}} \quad \dots (2)$$

comparando (1) y (2) se tiene: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

1901 Demostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si $z = x^y$

Desarrollo

$$\begin{aligned} z = x^y &\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x \\ &= x^{y-1}(1 + y \ln x) \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = x^y &\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \\ &= x^{y-1}(1 + y \ln x) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

comparando (1) y (2) se tiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

- 1902 Demostrar que para la función $f(x, y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$ con la condición complementaria de $f(0,0) = 0$, tenemos $f''_{xy}(0,0) = -1$, $f''_{yx}(0,0) = +1$

Desarrollo

i) Si $y \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f(0, y)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = -y$

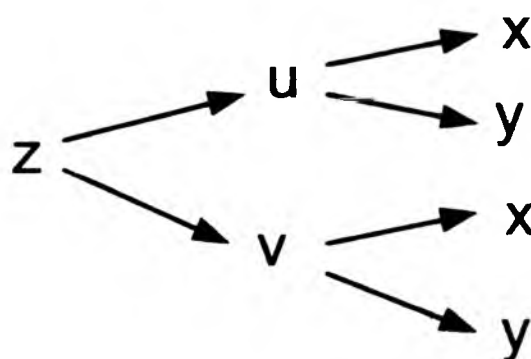
$$\frac{\partial^2 f(0, y)}{\partial x \partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = -1$$

ii) Si $x \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = x$

$$\frac{\partial^2 f(x, 0)}{\partial y \partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = 1$$

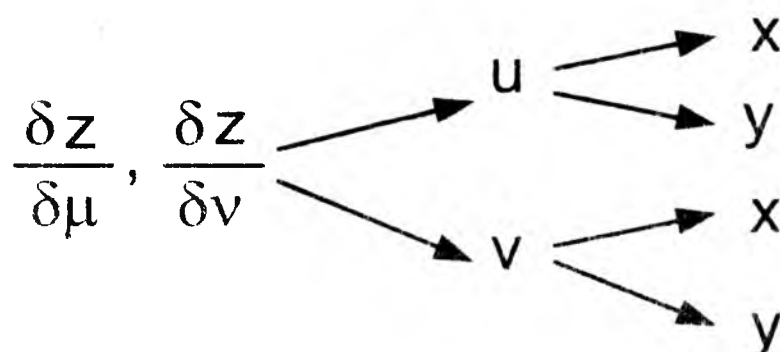
- 1903 Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ si $z = f(u, v)$ donde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$

Desarrollo



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
 &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)
 \end{aligned}$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (3)$$

reemplazando (2), (3) en (1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{uu}''(u, v) \cdot 4x^2 + f_{vv}''(u, v) y^2 + 4xy f_{vu}''(u, v) + 2f_u'(u, v)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2 f_{uu}''(u, v) + y^2 f_{vv}''(u, v) + 4xy f_{vu}''(u, v) + 2f_u'(u, v)$$

En forma similar para el caso $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

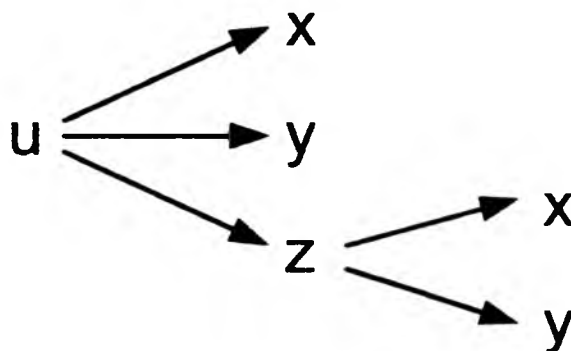
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4y^2 f_{uu}''(u, v) + x^2 f_{vv}''(u, v) + 4xy f_{uv}''(u, v) + 2f_u'(u, v)$$

en forma similar para el caso $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy f_{uu}''(u, v) + xy f_{vv}''(u, v) + 2(x^2 + y^2) f_{uv}''(u, v) + f_v'(u, v)$$

1904 Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ si $u = f(x, y, z)$ donde $z = \varphi(x, y)$

Desarrollo



$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y, z) + \varphi'_x(x, y) f'_z(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right)$$

$$= f''_{xx}(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + f''_{zx}(x, y, z) \right)$$

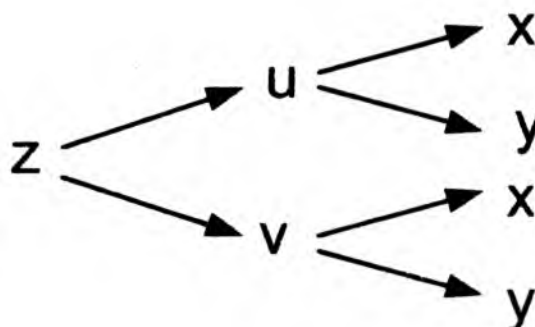
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y, z) + f''_{xz}(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$= f''_{xx}(x, y, z) + 2f''_{xz}(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y, z) + 2f''_{xz}(x, y, z) \varphi'_x(x, y) + f''_{zz}(x, y, z) \varphi'^2_x(x, y, z) + f'_z(x, y, z) \varphi''_{xx}(x, y)$$

1905 Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $z = f(u, v)$ donde $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$

Desarrollo

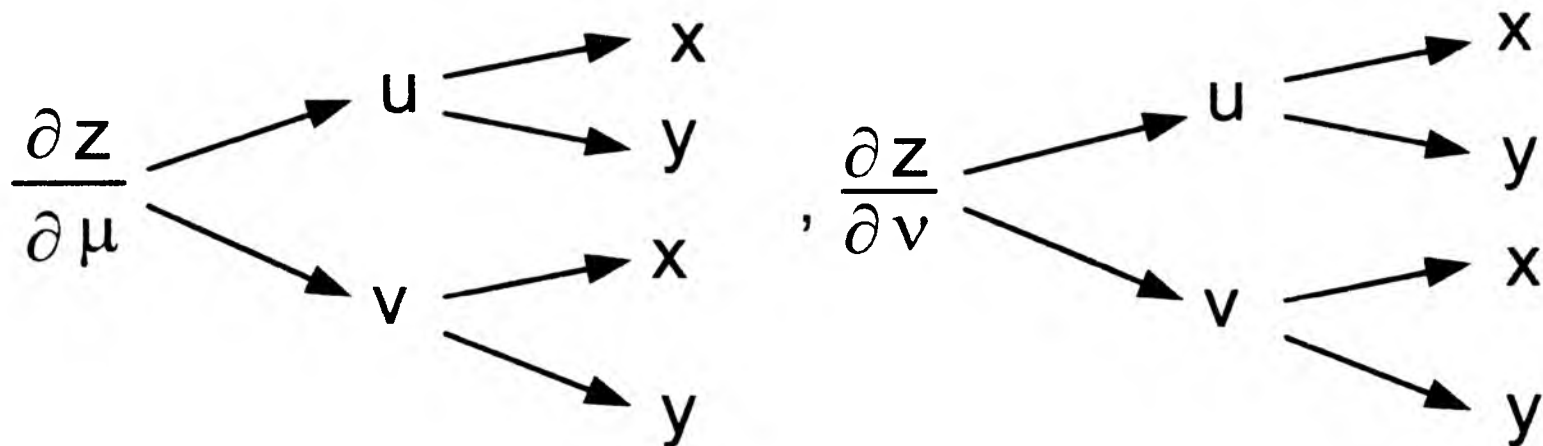


$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \quad \dots (1)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (3)$$

reemplazando (2), (3) en (1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

en forma similar se obtiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

1906 Demostrar que la función $u = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Desarrollo

$$u = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad \therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1907 Demostrar que la función $u = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$ donde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, satisface a

la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Desarrollo

$$u = \ln\left(\frac{1}{r}\right) = -\ln r = -\frac{1}{2} \ln[(x-a)^2 + (y-b)^2]$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \frac{x-a}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \frac{y-b}{r} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{x-a}{r} = -\frac{x-a}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{r} \left(\frac{y-b}{r} \right) = -\frac{y-b}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} \quad \dots (2)$$

sumando (1) y (2) se tiene: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

1908 Demostrar que la función $u(x,t) = A \sin(a\lambda t + \varphi) \sin \lambda x$ satisface a la ecuación de las vibraciones de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Desarrollo

$$u(x,t) = A \sin(a\lambda t + \varphi) \sin \lambda x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = Aa\lambda \cos(a\lambda t + \varphi) \sin \lambda x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Aa^2 \lambda^2 \sin(a\lambda t + \varphi) \sin \lambda x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\lambda \sin(a\lambda t + \varphi) \cos \lambda x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\lambda \operatorname{sen}(a\lambda t + \varphi) \operatorname{sen} \lambda x$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 (-A\lambda^2 \operatorname{sen}(a\lambda t + \varphi) \operatorname{sen} \lambda x) = -Aa^2 \lambda^2 \operatorname{sen}(a\lambda t + \varphi) \operatorname{sen} \lambda x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

1909 Demostrar que la función $u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}$

(x_0, y_0, z_0 son constantes) satisface a la ecuación de la conductividad calorífica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Desarrollo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-x_0}{2a^2 t (2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \left(\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \left(\frac{(y-y_0)^2}{4a^2 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \left(\frac{(z-z_0)^2}{4a^2 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{e^{\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \left(\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t^2} - \frac{3}{2a^2 t} \right)$$

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{e^{\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \left(\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4t^2} - \frac{3}{2t} \right) \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{e^{\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \left(\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4t^2} - \frac{3}{2t} \right) \dots (2)$$

comparando (1) y (2) se tiene: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$

1910 Demostrar que la función $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, donde φ y ψ son unas funciones cualquiera, diferenciables dos veces, satisface a la ecuación de las

vibraciones de la cuerda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Desarrollo

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \varphi''(x - at) + a^2 \psi''(x + at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (\varphi''(x - at) + \psi''(x + at)) \dots (1)$$

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x-at) + \psi''(x+at)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 (\varphi''(x-at) + \psi''(x+at)) \quad \dots (2)$$

ahora comparamos (1) y (2) se tiene: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

1911 Demostrar que la función $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface a la ecuación

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Desarrollo

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \psi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3} \psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} \psi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3} \psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} \psi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\boxed{x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x} \psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2} \psi''\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \psi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3} \psi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \psi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\boxed{2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y^2}{x} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2y^2}{x^2} \psi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2y}{x} \psi'\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \dots (2)$$

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} \psi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2} \psi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\boxed{y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2} \psi''\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \dots (3)$$

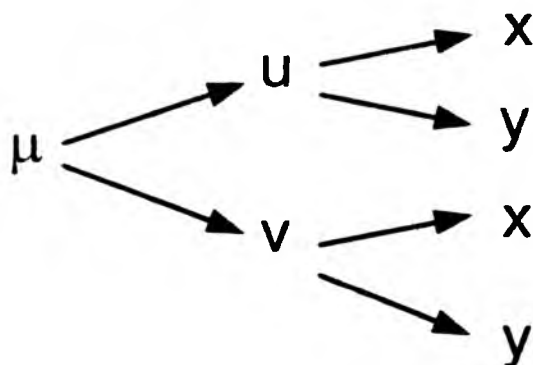
sumando (1) + (2) + (3) se tiene: $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

1912 Demostrar que la función $u = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ satisface a la ecuación

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Desarrollo

Sea $w = xy$, $v = \frac{y}{x}$; $u = \varphi(w) + \sqrt{w}\psi(v)$



Se ha deducido que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} w = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = y \\ \frac{\partial v}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} \end{cases}$$

$$u = \varphi(w) + \sqrt{w} \psi(v) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial w} = \varphi'(w) + \frac{1}{2\sqrt{w}} \psi(v)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} = \varphi''(w) - \frac{1}{4w^{\frac{3}{2}}} \psi(v)$$

$$u = \varphi(w) + \sqrt{w} \psi(v) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial v} = \sqrt{w} \psi'(v), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} = \frac{\psi'(v)}{2\sqrt{w}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = \sqrt{w} \psi''(v)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \left(\varphi''(w) - \frac{1}{4w^{\frac{3}{2}}} \psi(v) \right) + \frac{y^2}{x^4} \sqrt{w} \psi''(v) + 2 \frac{\psi'(v)}{2\sqrt{w}} \left(-\frac{y^2}{x^2} \right) + 0 + \frac{2y}{x^3} \sqrt{w} \psi'(v)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \varphi''(w) - \frac{y^2}{4w^{\frac{3}{2}}} \psi(v) + \frac{y^2 \sqrt{w}}{x^4} \psi''(v) - \frac{y^2 \psi'(v)}{\sqrt{w} x^2} + \frac{2y \sqrt{w} \psi'(v)}{x^3}$$

$$\boxed{x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 y^2 \left(\varphi''(w) - \frac{\psi(v)}{4w^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{y^2 \sqrt{w}}{x^4} \psi''(v) - \frac{y^2 \psi'(v)}{\sqrt{w}} + \frac{2y \sqrt{w} \psi'(v)}{x}} \dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\begin{cases} w = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial y} = x \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{2\psi'(v)}{2\sqrt{w}}$$

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 y^2 (\varphi''(w) - \frac{\psi(v)}{4w^{\frac{3}{2}}}) + \frac{y^2}{x^2} \sqrt{w} \psi''(v) + y^2 \frac{\psi'(v)}{\sqrt{w}} \quad \dots (2)$$

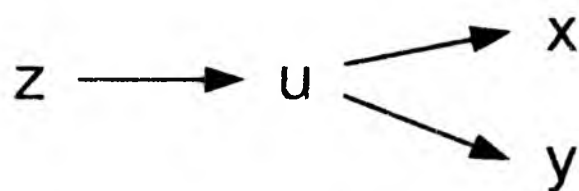
$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{2y^2 \psi'(v)}{\sqrt{w}} + \frac{2\sqrt{w} y \psi'(v)}{x} = -\frac{2y^2 \psi'(v)}{\sqrt{w}} + \frac{2wy \psi'(v)}{\sqrt{wx}} \\ &= -\frac{2y^2 \psi'(v)}{\sqrt{w}} + \frac{2y^2 \psi'(v)}{\sqrt{w}} = 0 \end{aligned} \quad \therefore x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1913 Demostrar que la función $z = f(x + \varphi(y))$ satisface a la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Desarrollo

$z = f(u)$ donde $u = x + \varphi(y)$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} = f'(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y} = f''(u) \cdot \varphi'(y)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(u) \cdot f''(u) \cdot \varphi'(y)} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \cdot \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(f'(u)) = \frac{\partial}{\partial u}(f'(u)) \frac{\partial u}{\partial x} = f''(u)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(u) \cdot f''(u) \cdot \varphi'(y)} \quad \dots (2)$$

comparando (1) y (2) se tiene: $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

1914 Hallar $U = u(x, y)$ si $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$

Desarrollo

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{integrando con respecto a } y$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x) \quad \text{integrando con respecto a } x$$

$$u(x, y) = F(x) + G(y)$$

1915 Determinar a la ecuación $u = u(x, y)$ que satisface a la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Desarrollo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{integrando respecto a } x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y), \text{ integrando respecto a } x$$

$$u = x \varphi(y) + \psi(y)$$

$$\therefore u(x,y) = x \varphi(y) + \psi(y)$$

1916 Hallar $d^2 z$, si $z = e^{xy}$

Desarrollo

Como $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, entonces se tiene:

$$z = e^{xy} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} \end{cases} \text{ reemplazando}$$

$$dz = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy = e^{xy} (y dx + x dy) \Rightarrow dz = e^{xy} (y dx + x dy)$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} d^2 x + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} d^2 y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} \end{cases} \text{ reemplazando}$$

$$d^2 z = y^2 e^{xy} d^2 x + 2(xye^{xy} + e^{xy}) dx dy + x^2 e^{xy} d^2 y$$

$$d^2 z = e^{xy} [y^2 d^2 x + 2(xy + 1) dx dy + x^2 d^2 y] = e^{xy} [(y dx + x dy)^2 + 2 dx dy]$$

1917 Hallar $d^2 u$ si $u = xyz$

Desarrollo

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d^2x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d^2y + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} d^2z + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy\right)$$

$$u = xyz \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = yz, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = xz, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y \\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy, & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z \end{cases}$$

$$d^2u = 0 + 0 + 0 + 2(x dy dz + y dx dz + z dx dy)$$

$$\therefore d^2u = 2(x dy dz + y dx dz + z dx dy)$$

1918 Hallar d^2z , si $z = \varphi(t)$ donde $t = x^2 + y^2$

Desarrollo

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(t) 2x = 2x \varphi'(t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\varphi'(t) + 2x\varphi''(t) \cdot 2x = 4x^2\varphi''(t) + 2\varphi'(t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(t) \cdot 2y = 2y \varphi'(t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\varphi'(t) + 2y\varphi''(t) \cdot 2y = 4y^2\varphi''(t) + 2\varphi'(t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x\varphi'(t)) = 2x\varphi''(t)2y = 4xy\varphi''(t)$$

$$d^2 z = (4x^2\varphi''(t) + 2\varphi'(t))dx^2 + 8xy\varphi''(t)dx dy + (4y^2\varphi''(t) + 2\varphi'(t))dy^2$$

$$d^2 z = 4\varphi'(t)(x dx + y dy)^2 + 2\varphi''(t)(dx^2 + dy^2)$$

1919 Hallar dz y $d^2 z$ si $z = u^v$, donde $u = \frac{x}{y}$, $v = xy$

Desarrollo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \text{ donde } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1} \cdot \frac{1}{y} + u^v \ln u \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy \left(\frac{x}{y} \right)^{xy-1} \frac{1}{y} + \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} \ln \left(\frac{x}{y} \right) \cdot y = y \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} (1 + \ln \frac{x}{y}) = y \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} (\ln e + \ln \frac{x}{y})$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = y \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} \ln \frac{xe}{y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = vu^{v-1} \left(-\frac{x}{y^2} \right) + u^v \ln u \cdot x$$

$$= xy \left(\frac{x}{y} \right)^{xy-1} \left(-\frac{x}{y^2} \right) + \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} \ln \left(\frac{x}{y} \right) \cdot x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} \left(\ln \left(\frac{x}{ye} \right) \right) \Rightarrow dz = y \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} \ln \left(\frac{xe}{y} \right) dx + \left(x \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} \cdot \ln \left(\frac{x}{ye} \right) \right) dy$$

$$dz = \left(\frac{x}{y} \right)^{xy} \left[y \ln \frac{xe}{y} dx + x \ln \left(\frac{x}{ye} \right) dy \right]$$

En forma similar para:

$$d^2z = \left(\frac{x}{y}\right)^{xy} \left[y^2 \ln^2\left(\frac{xe}{y}\right) + \frac{y}{x} \right] dx^2 + 2 \left[\ln \frac{x}{y} + xy \ln\left(\frac{xe}{y}\right) \cdot \ln\left(\frac{x}{ye}\right) \right] dx dy \\ + \left(x^2 \ln^2\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y} \right) dy^2$$

1920 Hallar d^2z , si $z = f(u,v)$, donde $u = ax$, $v = by$

Desarrollo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = af'_u(u,v)dx + bf'_v(u,v)dy$$

$$d^2z = a^2 f''_{uu}(u,v)dx^2 + 2abf''_{uv}(u,v)dx dy + b^2 f''_{vv}(u,v)dy^2$$

1921 Hallar d^2z si $z = f(u,v)$ donde $u = xe^y$, $v = ye^x$

Desarrollo

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{2y} f''_{uu}(u,v) + y^2 e^{2x} f''_{vv}(u,v) + 2 f''_{uv}(u,v) ye^x e^y + f'_u(u,v)(0) + f'_v(u,v)(0)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{2y} f''_{uu}(u,v) + y^2 e^{2x} f''_{vv}(u,v) + 2 ye^x e^y f''_{uv}(u,v)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{2y} f_{uu}''(u, v) + 2ye^x e^y f_{uv}''(u, v) + e^{2x} f_{vv}''(u, v) + xe^y f_u'(u, v) + 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{2y} f_{uu}''(u, v) + 2ye^x e^y f_{uv}''(u, v) + e^{2x} f_{vv}''(u, v) + xe^y f_u'(u, v)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = e^y f_u'(u, v) + xe^{2y} f_{uu}''(u, v) + e^x f_v'(u, v) + \\ &\quad + e^{x+y} (1 + xy) f_{uv}''(u, v) + ye^{2x} f_{vv}''(u, v) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^y f_u'(u, v) + xe^{2y} f_{uu}''(u, v) + e^x f_v'(u, v) + e^{x+y} (1 + xy) f_{uv}''(u, v) + ye^{2x} f_{vv}''(u, v)$$

$$\begin{aligned} d^2 z &= [e^{2y} f_{uu}''(u, v) + y^2 e^{2x} f_{vv}''(u, v) + 2ye^x e^y f_{uv}''(u, v)] dx^2 + \\ &\quad + [e^y f_u'(u, v) + xe^{2y} f_{uu}''(u, v) + e^x f_v'(u, v) + e^{x+y} (1 + xy) f_{uv}''(u, v) + ye^{2x} f_{vv}''(u, v)] dx dy \\ &\quad + [x^2 e^{2y} f_{uu}''(u, v) + 2ye^x e^y f_{uv}''(u, v) + e^{2x} f_{vv}''(u, v) + xe^y f_u'(u, v)] dy^2 \end{aligned}$$

1922 Hallar $d^3 z$ si $z = e^x \cos y$

Desarrollo

$$d^3 z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 z, \text{ desarrollando}$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -e^x \sen y, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -e^x \cos y$$

$$d^3 z = e^x \cos y dx^3 - 3e^x \operatorname{sen} y dx^2 dy - 3e^x \cos y dx dy^2 + e^x \cos y dy^3$$

$$d^3 z = e^x (\cos y dx^3 - 3 \operatorname{sen} y dx^2 dy - 3 \cos y dx dy^2 + \cos y dy^3)$$

1923 Hallar la diferencial de 3er orden de la función $z = x \cos y + y \operatorname{sen} x$

Desarrollo

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

$$z = x \cos y + y \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x - \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \cos y$$

$$d^2 z = -y \operatorname{sen} x dx^2 + 2(\cos x - \operatorname{sen} y) dx dy - x \cos y dy^2$$

1924 Hallar $df(1,2)$ y $d^2 f(1,2)$ si: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$

Desarrollo

$$df(1,2) = \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + y - \frac{4}{x} \Rightarrow \frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = 2 + 2 - 4 = 0$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x + 2y - \frac{10}{y} \Rightarrow \frac{\partial f(1, 2)}{\partial y} = 1 + 4 - \frac{10}{2} = 5 - 5 = 0$$

$$dz = df(1, 2) = 0 \, dx + 0 \, dy = 0 \quad \therefore df(1, 2) = 0$$

$$d^2 f(1, 2) = \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial x \partial y} dx \, dy + \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial y^2} dy^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + y - \frac{4}{x} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 2 + \frac{4}{x^2} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 1 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2 + \frac{10}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial x^2} = 6 \\ \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial x \partial y} = 1 \\ \frac{\partial^2 f(1, 2)}{\partial y^2} = \frac{9}{2} \end{cases} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x + 2y - \frac{10}{y} &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$d^2 f(1, 2) = 6dx^2 + 2dx \, dy + 4.5dy^2$$

1925 Hallar $d^2 f(0, 0, 0)$, si $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$

Desarrollo

$$d^2 f(x, y, z) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f$$

$$d^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx \, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx \, dz + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy \, dz \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x - 2y + 4z \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 4y - 2x + 2z \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 6z + 4x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} = 4 \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} = 4 \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} = 2 \end{cases}$$

$$d^2 f(0,0,0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 + 2(0 + 4dx dz + 2dy dz)$$

$$d^2 f(0,0,0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 + 8dx dz + 4dy dz$$

6.8. INTEGRACIÓN DE DIFERENCIALES EXACTAS.-

1ra. CONDICIÓN DE DIFERENCIAL EXACTA.-

Para que la expresión $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, en que las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son continuas conjuntamente con sus derivadas parciales de primer orden en un recinto simplemente con D , represente de por sí, en el recinto D , la diferencial exacta de una función determinada $u(x,y)$, es necesario y suficiente que se cumpla la condición.

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}}$$

2da. CASO: DE TRES VARIABLES.-

La expresión $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$, en que $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ y $R(x,y,z)$ junto con sus derivadas parciales de 1er orden, son funciones continuas de las variables x, y, z representa la diferencial exacta de una función determinada $u(x,y,z)$, en un recinto simplemente conexo D del espacio, y solo cuando en D se cumpla la condición:

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}}$$

Después de comprobar que las expresiones que se dan más abajo son diferenciales exactas de ciertas funciones, hallar estas funciones.

1926 $y \, dx + x \, dy$

Desarrollo

$$\begin{cases} P(x, y) = y \\ Q(x, y) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

como $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ es exacta entonces $\exists u(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = y, \text{ integrando respecto a } x$$

$u(x, y) = xy + g(y)$, derivando respecto a y

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x + g'(y) = Q = x$$

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

$$\therefore u(x, y) = xy + c$$

1927 $(\cos x + 3x^2 y)dx + (x^3 - y^3)dy$

Desarrollo

$$\begin{cases} P(x, y) = \cos x + 3x^2 y \\ Q(x, y) = x^3 - y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \end{cases}$$

como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es exacta $\Rightarrow \exists u(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \cos x + 3x^2 y, \text{ integrando } u(x,y) = \text{sen } x + x^3 y + g(y), \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^3 + g'(y) = Q(x,y) = x^3 - y^2$$

$$g'(y) = -y^3 \Rightarrow g(y) = -\frac{y^4}{4}$$

$$u(x,y) = x^3 y - \frac{y^4}{4} + \text{sen } x$$

1928

$$\frac{(x+2y)dx + y dy}{(x+y)^2}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} P(x,y) = \frac{x+2y}{(x+y)^2} \\ Q(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{2y}{(x+y)^3} \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\frac{2y}{(x+y)^3} \end{cases}$$

como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es exacta $\Rightarrow \exists u(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P = \frac{x+2y}{(x+y)^2}, \text{ integrando respecto a } x$$

$$u(x,y) = \int \frac{x+2y}{(x+y)^2} dx + g(y) = \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + g(y)$$

$$u(x, y) = \ln(x + y) - \frac{y}{x + y} + g(y)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x + y} - \frac{x}{(x + y)^2} + g'(y) = Q(x, y) = \frac{y}{(x + y)^2}$$

$$\frac{x + y - x}{(x + y)^2} + g'(y) = \frac{y}{(x + y)^2} \Rightarrow \frac{y}{(x + y)^2} + g'(y) = \frac{y}{(x + y)^2}$$

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c \quad \therefore u(x, y) = \ln(x + y) - \frac{y}{x + y} + c$$

1929

$$\frac{x + 2y}{x^2 + y^2} dx - \frac{2x - y}{x^2 + y^2} dy$$

Desarrollo

$$\begin{cases} P = \frac{x + 2y}{x^2 + y^2} \\ Q = -\frac{2x - y}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x^2 - 2xy - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x^2 - 2xy - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es exacta $\Rightarrow \exists u(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P = \frac{x + 2y}{x^2 + y^2}, \text{ integrando respecto a } x$$

$$u(x, y) = \int \frac{x + 2y}{x^2 + y^2} dx + g(y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + g(y), \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} + g'(y) = Q(x, y) = -\frac{2x - y}{x^2 + y^2}$$

$$-\frac{2x - y}{x^2 + y^2} + g'(y) = -\frac{2x - y}{x^2 + y^2} \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

$$\therefore u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

1930 $\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$

Desarrollo

$$\begin{cases} P = \frac{1}{y} \\ Q = -\frac{x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \end{cases}$$

como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es exacta $\Rightarrow \exists u(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P = \frac{1}{y} \text{ integrando se tiene: } u(x, y) = \frac{x}{y} + g(y), \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + g'(y) = Q(x, y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$$

$$\therefore u(x, y) = \frac{x}{y} + c$$

1931 $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$

Desarrollo

$$\begin{cases} P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es exacta $\Rightarrow \exists u(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ integrando } u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + g(y), \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + g'(y) = Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c \quad \therefore u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + c$$

- 1932** Determinar las constantes a y b de tal forma, que la expresión
$$\frac{(ax^2 + 2xy + y^2)dx - (x^2 + 2xy + by^2)dy}{(x^2 + y^2)^2}$$
 sea la diferencial exacta de una función z , y hallar esta última.

Desarrollo

$$\begin{cases} P = \frac{ax^2 + 2xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ Q = -\frac{x^2 + 2xy + by^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x^3 - 6xy^2 + (2 - 4a)x^2y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x^3 + (4b - 2)xy^2 + 6x^2y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} \end{cases}$$

para que sea exacta debe cumplirse que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{2x^3 - 6xy^2 + (2 - 4a)x^2y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x^3 + (4b - 2)xy^2 + 6x^2y - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\text{de donde } \begin{cases} 4b - 2 = -6 \\ 2 - 4a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

ahora calculamos la función $z = u(x, y)$ de acuerdo a los criterios establecidos

$$\text{se tiene: } z = u(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$$

Después de comprobar que las expresiones que se dan más abajo son las diferenciales exactas de ciertas funciones, hallar estas funciones.

1933 $(2x + y + z)dx + (x + 2y + z)dy + (x + y + 2z)dz$

Desarrollo

$$P = 2x + y + z, \quad Q = x + 2y + z, \quad R = x + y + 2z$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 2 \quad \text{es exacta entonces } \exists u(x, y, z)$$

$$\text{tal que: } \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = P(x, y, z) = 2x + y + z \quad \text{integrando}$$

$$u(x, y, z) = \int (2x + y + z)dx + g(y, z)$$

$$u(x, y, z) = x^2 + xy + xz + g(y, z), \quad \text{derivando se tiene:}$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = x + g'_y(y, z) = Q = x + 2y + z \Rightarrow g'_y(y, z) = 2y + z$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = x + g'_z(y, z) = R = x + y + 2z \Rightarrow g'_z(y, z) = y + 2z$$

$$g'_y(y, z) = 2y + z \Rightarrow g(y, z) = y^2 + yz + \varphi(z)$$

$$g'_z(y, z) = y + \varphi'(z)$$

$$y + \varphi'(z) = y + 2z \Rightarrow \varphi'(z) = 2z \Rightarrow \varphi(z) = z^2 + c$$

$$g(y, z) = y^2 + yz + z^2 + c$$

$$u(x, y, z) = x^2 + xy + xz + y^2 + yz + z^2 + c$$

1934 $(3x^2 + 2y^2 + 3z)dx + (4xy + 2y - z)dy + (3x - y - 2)dz$

Desarrollo

$$P = 3x^2 + 2y^2 + 3z, \quad Q = 4xy + 2y - z, \quad R = 3x - y - 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 4y; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 3$$

es exacta $\Rightarrow \exists u(x, y, z)$ tal que $\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = P$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2 + 3z, \text{ integrando respecto a } x$$

$$u(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 + 3xz + g(y, z), \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = 4xy + g'_y(y, z) = Q = 4xy + 2y - z \Rightarrow g'_y(y, z) = 2y - z$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = 3x + g'_z(y, z) = R = 3x - y - 2$$

$$g'_z(y, z) = -y - 2 \Rightarrow g(y, z) = -yz - 2z + \varphi(y), \text{ derivando respecto a } y$$

$$g'_y(y, z) = -z + \varphi'(y) = 2y - z = g'_y(y, z)$$

$$\varphi'(y) = 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^2 + c \text{ de donde } g(y, z) = -yz - 2z + y^2 + c$$

$$\therefore u(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 + 3xz - yz - 2z + y^2 + c$$

1935 $(2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2)dx + (x^2z - 6xyz + 8x^2y + 1)dy + (x^2y - 3xy^2 + 3)dz$

Desarrollo

$$\begin{cases} P = 2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2 \\ Q = x^2z - 6xyz + 8x^2y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 2xz - 6yz + 16xy \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz - 6yz + 16xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\begin{cases} P = 2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2 \\ Q = x^2y - 3xy^2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} = 2xy - 3y^2 \\ \frac{\partial R}{\partial x} = 2xy - 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

Luego es exacta $\Rightarrow \exists u(x, y, z)$ tal que:

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = P = 2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2, \text{ integrando}$$

$$u(x, y, z) = x^2yz - 3xy^2z + 4x^2y^2 + 2x + g(y, z), \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = x^2z - 6xyz + 8x^2y + g'_y(y, z) = Q = x^2z - 6xyz + 8x^2y + 1$$

$$g'_y(y, z) = 1 \Rightarrow g(y, z) = y + \varphi(z) \text{ de donde } g'_z(y, z) = \varphi'(z)$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = x^2y - 3xy^2 + g'_z(y, z) = R = x^2y - 3xy^2 + 3$$

$$g'_z(y, z) = 3 \text{ de donde } g'_z(y, z) = \varphi'(z) = 3 \Rightarrow \varphi(z) = 3z + c$$

$$g(y, z) = y + 3z + c$$

$$\therefore u(x, y, z) = x^2 yz - 3xy^2 z + 4x^2 y^2 + 2x + y + 3z + c$$

1936 $\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz$

Desarrollo

$$\begin{cases} P = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2} \\ Q = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\begin{cases} R = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \\ Q = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\begin{cases} R = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \\ P = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

es exacta $\Rightarrow \exists u(x, y, z)$ tal que $\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = P = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}$, integrando

$$u(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + g(y, z), \text{ derivando}$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + g'_y(y, z) = Q = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}$$

$$g'_y(y, z) = \frac{1}{z} \Rightarrow g(y, z) = \frac{y}{z} + \varphi(z)$$

$$g'_z(y, z) = -\frac{y}{z^2} + \varphi'(z)$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = \frac{1}{x} + g'_z(y, z) = R = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \Rightarrow g'_z(y, z) = -\frac{y}{z^2}$$

$$\text{Luego } -\frac{y}{z^2} + \varphi'(z) = -\frac{y}{z^2} \Rightarrow \varphi(z) = c \Rightarrow g(y, z) = \frac{y}{z} + c$$

$$\therefore u(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + c$$

1937

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Desarrollo

$$\begin{cases} P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\begin{cases} R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{-yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{-xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{-xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{-xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

entonces es exacta $\Rightarrow \exists u(x,y,z)$ tal que

$$du(x,y,z) = d\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ integrando } u(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + c$$

1938 Se dan las proyecciones de una fuerza sobre los ejes de coordenadas

$$X = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad Y = \frac{\lambda x}{(x+y)^2}, \text{ donde } \lambda \text{ es una magnitud constante ¿Cuál debe}$$

ser el coeficiente λ ; para que la fuerza tenga potencial?

Desarrollo

$$\text{Consideremos } dF(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2} dx + \frac{\lambda x}{(x+y)^2} dy$$

$$\text{Donde } \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{y}{(x+y)^2} \\ Q = \frac{\lambda x}{(x+y)^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x-y}{(x+y)^3} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-\lambda(x-y)}{(x+y)^3} \end{array} \right.$$

Para que sea exacta debe cumplirse que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es decir:

$$\frac{-\lambda(x-y)}{(x+y)^3} = \frac{x-y}{(x+y)^3} \Rightarrow \lambda = -1 \quad \therefore \lambda = -1$$

1939 ¿A qué condición debe satisfacer la función $f(x,y)$, para que la expresión $f(x,y)$ $(dx + dy)$ sea una diferencial exacta?

Desarrollo

$f(x,y) (dx + dy) = f(x,y)dx + f(x,y)dy$, donde

$$\begin{cases} P(x,y) = f(x,y) \\ Q(x,y) = f(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = f'_y(x,y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = f'_x(x,y) \end{cases}$$

para que sea exacta debe cumplirse que: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Luego la condición que debe cumplirse es $f'_x(x,y) = f'_y(x,y)$

1940 Hallar la función u , si $du = f(xy) (y dx + x dy)$

Desarrollo

$du = y f(xy) dx + x f(xy) dy$, de donde

$$\begin{cases} P = yf(x,y) \\ Q = xf(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = f(xy) + xyf'_x(xy) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = f(xy) + xyf'_x(xy) \end{cases}$$

Luego $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es exacta entonces como $du = f(xy)(ydx + xdy) = f(x,y)d(xy)$

Integrando el 1er miembro con respecto a y , y el segundo miembro con respecto a xy .

$$\int du = \int f(xy)d(xy) + c$$

$$u = \int_a^{xy} f(t)dt + c, \text{ donde } t = xy, \text{ a constante}$$

6.9. DERIVACIONES DE FUNCIONES IMPLÍCITAS.-

1er. CASO DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE.-

Sea $f(x,y) = 0$ una función diferenciable de las variables x e y , la derivada de esta función $f'_y(x,y) \neq 0$, se puede hallar por la fórmula $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$ las derivadas de orden superior se hallar por derivación sucesiva de la fórmula dada.

2do. CASO DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES.-

En forma similar si la ecuación $F(x,y,z) = 0$ donde $F(x,y,z)$ es una función diferenciable de las variables x, y, z , determina a z como función de las variables independientes x, y : $F'_z(x,y,z) \neq 0$; las derivadas parciales de esta función dada de forma implícita puede hallarse por la fórmula:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

otro procedimiento para hallar las derivadas de la función Z es el siguiente: diferenciando la ecuación $F(x,y,z) = 0$, obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial X} dx + \frac{\partial F}{\partial Y} dy + \frac{\partial F}{\partial Z} dz = 0$$

de donde puede determinarse dz , y por consiguiente:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y}$$

3er. SISTEMA DE FUNCIONES IMPLÍCITAS.-

Si el sistema de dos ecuaciones $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ determinar u y v funciones diferenciables de las variables x e y y el jacobiano.

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

las diferenciales de estas funciones se pueden hallar de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz + \frac{\partial G}{\partial u} du + \frac{\partial G}{\partial v} dv = 0$$

4to. FUNCIONES DADAS EN FORMA PARÁMETRICA.-

Si la función diferenciable Z de las variables x e y se da en ecuaciones paramétricas $X = x(u, v)$, $Y = y(u, v)$, $Z = z(u, v)$ y $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ la

diferencial se puede hallar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{cases}$$

conociendo la diferencial $dz = p \, dx + q \, dy$ hallamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q$$

1941 Sea Y una función de X, determinada por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hallar $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{y} \quad \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Desarrollo

$$\text{Sea } f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{a^2}, \quad f'_y(x, y) = \frac{2y}{b^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{b^2 x}{a^2 y} \right) = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{y - \frac{dy}{dx} x}{y^2} \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{y + \frac{b^2 x}{a^2 y}}{y^2} \right) = -\frac{b^2}{a^4} \left(\frac{a^2 y^2 + b^2 x}{y^3} \right) \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^4} \left(\frac{a^2 b^2}{y^3} \right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{b^4}{a^2 y^3} \right) = \frac{3b^4}{a^2 y^4} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{3b^4}{a^2 y^4} \left(-\frac{b^2 x}{a^2 y} \right) = -\frac{3b^6 x}{a^4 y^5}$$

1942 Sea Y una función determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + 2axy = 0$ ($a > 1$).

Demostrar, que $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ y explicar el resultado obtenido.

Desarrollo

$$\text{Sea } f(x, y) = x^2 + y^2 + 2axy$$

$$f'_x(x, y) = 2x + 2ay, \quad f'_y(x, y) = 2y + 2ax$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 2ay}{2y + 2ax} = -\frac{x + ay}{y + ax} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x + ay}{y + ax}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x + ay}{y + ax}\right) = -\frac{(y + ax)\left(1 + a\frac{dy}{dx}\right) - (x + ay)\left(a + \frac{dy}{dx}\right)}{(y + ax)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y + ax)\left(1 - \frac{ax + a^2y}{y + ax}\right) - (x + ay)\left(a - \frac{x + ay}{y + ax}\right)}{(y + ax)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y - a^2y) - \frac{(x + ay)(a^2x - x)}{y + ax}}{(y + ax)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(a^2 - 1)[(y + ax)y + x(x + ay)]}{(y + ax)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(a^2 - 1)[y^2 + x^2 + 2axy]}{(y + ax)^2} = -\frac{(a^2 - 1)}{(y + ax)^3}(0) = 0. \quad \text{Luego } \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

1943 Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y = 1 + y^x$

Desarrollo

$$f(x, y) = 1 + y^x - y \Rightarrow f'_x(x, y) = y^x \ln x$$

$$f'_y(x, y) = xy^{x-1} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{y^x \ln x}{xy^{x-1} - 1} = \frac{y^x \ln x}{1 - xy^{x-1}}$$

1944 Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $y = x + \ln y$

Desarrollo

$$f(x, y) = y - x - \ln y \Rightarrow f'_x(x, y) = -1$$

$$f'_y(x, y) = 1 - \frac{1}{y} = \frac{y-1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{-1}{\frac{y-1}{y}} = \frac{y}{y-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y-1} \right) = \frac{(y-1) \frac{dy}{dx} - y \frac{dy}{dx}}{(y-1)^2} = \frac{-\frac{y-1}{y}}{(y-1)^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y(y-1)}$$

1945 Hallar $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$, $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=1}$ si $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$ utilizando los

resultados obtenidos, representar aproximadamente la gráfica de esta curva en el entorno del punto $x = 1$.

Desarrollo

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2$$

$$f'_x(x, y) = 2x - 2y + 1, \quad f'_y(x, y) = 2y - 2x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{2x - 2y + 1}{2y - 2x + 1} \quad \text{para } x = 1, \quad y^2 - y = 0, \quad y = 0, \quad y = 1$$

$$\text{para } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 36 - 1$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{2x - 2y + 1}{2y - 2x + 1} \right) = -\frac{-8}{(2y - 2x + 1)^3} \Rightarrow \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=1} = 86 - 8$$

1946 La función Y está determinada por la ecuación $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ($a \neq 0$).

$$\text{Hallar } \frac{dy}{dx} \text{ y } \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Desarrollo

$$\text{Sea } f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{a(-\frac{y}{x^2})}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x + ay}{x^2 + y^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} - a \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y - ax}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{\frac{x + ay}{x^2 + y^2}}{\frac{y - ax}{x^2 + y^2}} = \frac{x + ay}{ax - y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x + ay}{ax - y} \right) = \frac{(a^2 + 1)(x^2 + y^2)}{(ax - y)^3}$$

1947 Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$

Desarrollo

Sea $f(x, y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$

$$f'_x(x, y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{ye^{xy} + ye^{-xy} - ye^{xy} + ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) = \frac{2y}{x^2}$$

1948 La función Z de las variables x e y se da por la ecuación:

$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

Desarrollo

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 3yx - 3xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow (z^2 - xy) \frac{\partial z}{\partial x} = yz - x^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}$$

$$6y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - 3xz - 3xy \frac{\partial z}{\partial y} - 2 = 0 \Rightarrow (3z^2 - 3xy) \frac{\partial z}{\partial y} = 3xz - 6y^2 + 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3xy - 6y^2 + 2}{3z^2 - 3xy} = \frac{6y^2 - 3xy - 2}{3(xy - z^2)}$$

1949 Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$

Desarrollo

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$$

$$\cos y - y \operatorname{sen} z \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial x} - z \operatorname{sen} x = 0$$

$$(\cos x - y \operatorname{sen} z) \frac{\partial z}{\partial x} = -\cos y - z \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\cos y + z \operatorname{sen} x}{\cos x - y \operatorname{sen} z} = \frac{z \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - y \operatorname{sen} z}$$

$$-x \operatorname{sen} z + \cos z - y \operatorname{sen} z \frac{\partial z}{\partial y} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$(\cos x - y \operatorname{sen} z) \frac{\partial z}{\partial y} = x \operatorname{sen} y - \cos z \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \operatorname{sen} y - \cos z}{\cos x - y \operatorname{sen} z}$$

1950 La función Z viene dada por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ para el sistema de valores: $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

Desarrollo

$$2x - 2z \frac{\partial z}{\partial x} - y = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y - 2x}{-2z}$$

para $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$

$$2y - 2z \frac{\partial z}{\partial y} - x = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - 2y}{-2z}$$

para $x = 1, y = 0, z = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$

1951 Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Desarrollo

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^2}{a^2} \left(\frac{z - x \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} \right) = -\frac{c^2}{a^2} \left(\frac{z + \frac{c^2 x^2}{a^2 z}}{z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^2}{a^4} \left(\frac{a^2 z^2 + c^2 x^2}{z^3} \right) = \frac{c^2}{a^4} \left(\frac{a^2 c^2 (b^2 - y^2)}{b^2 z^3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4}{a^2} \left(\frac{b^2 - y^2}{b^2 z^3} \right) = -c^4 \left(\frac{b^2 - y^2}{a^2 b^2 z^3} \right)$$

$$\frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4 (a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{c^2 x}{a^2 z} \right) = -\frac{c^2}{a^2} \left(\frac{0 - x \frac{z}{y}}{z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{x(-\frac{c^2 y}{b^2 z})}{z^2} \right) = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}$$

1952 $f(x,y,z) = 0$ demostrar que $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$

Desarrollo

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f'_y(x,y)}{f'_x(x,y)}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f'_z(x,y)}{f'_y(x,y)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_z(x,y)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{f'_y(x,y)}{f'_x(x,y)} \right) \left(-\frac{f'_z(x,y)}{f'_y(x,y)} \right) \left(-\frac{f'_x(x,y)}{f'_z(x,y)} \right) = -1$$

1953 $Z = \varphi(x,y)$ donde y es función de x determinada por la ecuación $\psi(x,y) = 0$.
Hallar $\frac{dz}{dx}$

Desarrollo

$\frac{dz}{dx}$ calcularemos por la formula siguiente: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'_x(x,y) + \varphi'_y(x,y) \left(-\frac{\psi'_x(x,y)}{\psi'_y(x,y)} \right)$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'_x(x,y) - \varphi'_y(x,y) \left(\frac{\psi'_x(x,y)}{\psi'_y(x,y)} \right)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi'_x(x,y) \cdot \psi'_y(x,y) - \varphi'_y(x,y) \cdot \psi'_x(x,y)}{\psi'_y(x,y)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x, y) & \varphi'_y(x, y) \\ \psi'_x(x, y) & \psi'_y(x, y) \end{vmatrix}}{\psi'_y(x, y)}$$

1954 Hallar dz y d^2z , si $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Desarrollo:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \text{donde} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ entonces: $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 2z$

Luego $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$. Entonces: $dz = -\frac{x}{z} dx - \frac{y}{z} dy$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \quad \text{donde}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(z - x \frac{\partial z}{\partial x})}{z^2} = -\frac{z + \frac{x^2}{z}}{z^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3} = \frac{y^2 - a^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(z - y \frac{\partial z}{\partial y})}{z^2} = -\frac{z + \frac{y^2}{z}}{z^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3} = \frac{x^2 - a^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{z} \right) = -\frac{xy}{z^3}, \quad \text{luego se tiene:}$$

$$dz = \frac{y^2 - a^2}{z^3} dx^2 - \frac{2xy}{z^3} dx dy + \frac{x^2 - a^2}{z^3} dy^2$$

- 1955** Sea Z una función de las variables x e y determinadas por la ecuación $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$. Hallar dz y d^2z para el sistema de valores: $x = 2, y = 0, z = 1$

Desarrollo

Sea $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8$

$$F'_x = 4x - 8z, \quad F'_y = 4y, \quad F'_z = 2z - 8x - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{4x - 8z}{2z - 8x - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{4y}{2z - 8x - 1}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{4x - 8z}{2z - 8x - 1} dx - \frac{4y}{2z - 8x - 1} dy$$

para $x = 2, y = 0, z = 1$ se tiene $dz = 0$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{4x - 8z}{2z - 8x - 1} \right) = -\frac{(2z - 8x - 1)(4 - 8 \frac{\partial z}{\partial x}) - (4x - 8z)(2 \frac{\partial z}{\partial x} - 8)}{(2z - 8x - 1)^2}$$

para $x = 2, y = 0, z = 1, \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4}{15}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{4y}{2z - 8x - 1} \right) = -\frac{(2z - 8x - 1)4 - 4y(2 \frac{\partial z}{\partial y} - 0)}{(2z - 8x - 1)^2}$$

para $x = 2, y = 0, z = 1$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4}{15}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{4x-8z}{2z-8x-1} \right) = -\frac{(2z-8x-1)(-8\frac{\partial z}{\partial y}) - (4x-8z)(2\frac{\partial z}{\partial y})}{(2z-8x-1)^2}$$

para $x = 2, y = 0, z = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, d^2 z = \frac{4}{15}(dx^2 + dy^2)$

1956 Hallar dz y $d^2 z$, si $\ln z = x + y + z - 1$ ¿A qué son iguales las derivadas primera y segunda de la función Z ?

Desarrollo

Sea $F(x,y,z) = \ln z - x - y - z + 1$ d donde $F'_x = -1, F'_y = -1, F'_z = \frac{1}{z} - 1$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \text{donde} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-1}{\frac{1}{z}-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{1-z} = -\frac{z}{z-1} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{z-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-1}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{z}{z-1}$$

$$dz = -\frac{z}{z-1} dx - \frac{z}{z-1} dy = \frac{z}{1-z}(dx + dy)$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

$$d^2 z = \frac{z}{(1-z)^3} (dx^2 + 2 dx dy + dy^2)$$

- 1957** Sea la función Z dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$ donde φ es una función cualquiera diferenciable y a, b, c constantes. Demostrar que:

$$(cy - bz)\frac{z}{x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

Desarrollo

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$$

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'[a + c\frac{\partial z}{\partial x}] \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - a\varphi'}{c\varphi' - 2z}$$

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'[b + c\frac{\partial z}{\partial y}] \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - b\varphi'}{c\varphi' - 2z}$$

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

$$\begin{aligned} (cy - bz)\left(\frac{2x - a\varphi'}{c\varphi' - 2z}\right) + (az - cx)\left(\frac{2y - b\varphi'}{c\varphi' - 2z}\right) &= \frac{2ayz - 2bxz + bcx\varphi' - ac\varphi'y}{c\varphi' - 2z} \\ &= \frac{2z(ay - bx) + c\varphi'(bx - ay)}{c\varphi' - 2z} = \frac{(2z - c\varphi')(ay - bx)}{c\varphi' - 2z} = bx - ay \end{aligned}$$

- 1958** Demostrar que la función Z , determinada por la ecuación $F(x - az, y - bz) = 0$ donde F es una función diferenciable cualquiera de dos argumentos

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Desarrollo

Sean $u = x - az$, $V = y - bz$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = F'_u \cdot 1 = F'_u$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = F'_v \cdot 1 = F'_v$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = F'_u \cdot (-a) + F'_v \cdot (-b) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = -aF'_u - bF'_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_v}{F'_z} = -\frac{F'_v}{-(aF'_u + bF'_v)} = \frac{F'_v}{aF'_u + bF'_v}$$

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{aF'_u}{aF'_u + bF'_v} + \frac{bF'_v}{aF'_u + bF'_v} = \frac{aF'_u + bF'_v}{aF'_u + bF'_v} = 1$$

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

1959 $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$. Demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$

Desarrollo

Sean $u = \frac{x}{z}$ y $v = \frac{y}{z}$ como $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = F(u, v) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = F'_u \cdot \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F'_u}{z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = F'_v \cdot \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{F'_v}{z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F'_u \left(-\frac{x}{z^2}\right) + F'_v \left(-\frac{y}{z^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} (xF'_u + yF'_v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{zF'_u}{xF'_u + yF'_v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{zF'_v}{xF'_u + yF'_v}$$

$$\text{Luego } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xzF'_u}{xF'_u + yF'_v} + \frac{yzF'_v}{xF'_u + yF'_v}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \left(\frac{xF'_u + yF'_v}{xF'_u + yF'_v} \right) = z$$

1960 Demostrar, que la función Z , determinada por la ecuación $y = x \varphi(z) + \psi(z)$

satisface a la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0$

Desarrollo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi(z)}{x\varphi'(z) + \psi'(z)} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x\varphi'(z) + \psi'(z)} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\varphi(z)\varphi'(z)[x\varphi'(z) + \psi'(z)] - \varphi^2(z)[x\varphi''(z) + \psi''(z)]}{[x\varphi'(z) + \psi'(z)]^3} \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x\varphi''(z) + \psi''(z)}{[x\varphi'(z) + \psi'(z)]^3} \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\varphi(z)(x\varphi''(z) + \psi''(z) - \varphi'(z))(x\varphi'(z) + \psi'(z))}{[x\varphi'(z) + \psi'(z)]^3} \quad \dots (4)$$

de (1), (2), (3) y (4) se tiene que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0$$

1961 Las funciones Y y Z de la variable independiente x se dan por el sistema de ecuaciones $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$. Hallar $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^2z}{dx^2}$ para $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

Desarrollo

Diferenciando las dos ecuaciones se tiene que:

$$2x \, dx + 2y \, dy - 2z \, dz = 0, \quad 2x \, dx + 4y \, dy + 6z \, dz = 0$$

despejando $z \, dz$ y reemplazando en la otra ecuación

$$8 \, dz = x \, dx + y \, dy \Rightarrow x \, dx + 2y \, dy + 3(x \, dx + y \, dy) = 0$$

$$4x \, dx + 5y \, dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{5y}$$

$$\text{para } x = 1, y = 0, z = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \infty$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{5} \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{4}{5} \left(\frac{y + \frac{4x^2}{5y}}{y^2} \right) = -\frac{4}{25} \left(\frac{5y^2 + 4x^2}{y^3} \right)$$

$$\text{para } x = 1, y = 0, z = 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \infty$$

despejando $y \, dy$ y reemplazando en la otra se tiene:

$$y \, dy = z \, dz - x \, dx \Rightarrow x \, dx + 2z \, dz - 2x \, dx + 3z \, dz = 0$$

$$5z \, dz = x \, dx \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{x}{5z}$$

$$\text{para } x = 1, y = 0, z = 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{5}$$

- 1962** Las funciones Y y Z de la variable independiente x se dan por el sistema de ecuaciones: $xyz = a$, $x + y + z = b$. Hallar dy , dz , d^2y , d^2z

Desarrollo

Diferenciando a la ecuación $xyz = a$ se tiene:

$$xy \, dz + xz \, dy + yz \, dx = 0 \quad \dots (1)$$

Diferenciando a la ecuación $x + y + z = b$ se tiene:

$$dx + dy + dz = 0 \Rightarrow dz = -dx - dy \quad \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$xy(-dx - dy) + xz \, dy + yz \, dx = 0 \text{ de donde } dy = \frac{y(z-x)}{x(y-z)} dx \quad \dots (\alpha)$$

$$\text{de } dx + dy + dz = 0 \text{ se tiene } dy = -dx - dz \quad \dots (3)$$

$$\text{reemplazando en (1) se tiene: } xy \, dz + xz(-dx - dz) + yz \, dx = 0$$

$$\text{de donde se tiene: } dz = \frac{z(x-y)}{x(y-z)} dx \quad \dots (\beta)$$

$$\text{de } (\alpha) \text{ y } (\beta) \text{ se tiene: } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y(z-x)}{x(y-z)} ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z(x-y)}{x(y-z)}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(z \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y)(xy - xz) - (yz - xy)(x \frac{\partial y}{\partial x} + y - x \frac{\partial z}{\partial x} - z)}{x^2(y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -a \frac{[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]}{x^3(y-z)^3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(z + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial y}{\partial x})(xy - xz) - (xz - yz)(x \frac{\partial y}{\partial x} + y - x \frac{\partial z}{\partial x} - z)}{x^2(y - z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]}{x^3(y - z)^3}, \text{ de las ecuaciones } (\alpha) \text{ y } (\beta) \text{ se tiene:}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0 \text{ luego tenemos:}$$

$$d^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx^2 = -\frac{a}{x^3(y - z)^3} [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] dx^2$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 = \frac{a}{x^3(y - z)^3} [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] dx^2$$

1963 Las funciones u y v de las variables independientes x e y , se dan por el sistema de ecuaciones implícitas: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, para $x = 0, y = 1$.

Desarrollo

Diferenciando la ecuación $u = x + y$ se tiene: $du = dx + dy \quad \dots (1)$

diferenciando la ecuación $uv = y$ es decir: $u dv + v du = dy \quad \dots (2)$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $(x + y)dv + \frac{y}{x + y}(dx + dy) = dy$ de donde

$$dv = \frac{x}{(x + y)^2} dy - \frac{y}{(x + y)^2} dx \text{ de aquí se tiene:}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{(x+y)^2} dx, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{(x+y)^2} \quad \text{de donde}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2y}{(x+y)^3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{2x}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{y-x}{(x+y)^3} \quad \text{además} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1. \quad \text{Luego:}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{para } x=0, y=1 \text{ tenemos que:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 1$$

- 1964** Las funciones u y v de las variables independientes x e y se dan por el sistema de ecuaciones implícitas: $u + v = x$, $u - yv = 0$. Hallar du , dv , d^2u , d^2v .

Desarrollo

$$\text{Diferenciando } u + v = x \Rightarrow du = dx - dv \quad \dots (1)$$

$$\text{Diferenciando } u - yv = 0 \Rightarrow du - y dv - v dy = 0 \quad \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) se tiene:

$$dv = \frac{1}{y+1} dx - \frac{v}{y+1} dy \quad \text{de aquí se tiene:} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y+1}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{v}{y+1}$$

$$\text{luego:} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2v}{(y+1)^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(y+1)^2}$$

reemplazando en (1) se tiene:

$$du = \frac{y}{y+1} dx + \frac{v}{y+1} dy, \text{ de aquí se tiene: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{y+1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{y+1}$$

$$\text{Luego: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2v}{(y+1)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(y+1)^2}$$

Reemplazando estos valores en:

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

$$d^2 u = \frac{2}{(y+1)^2} dx dy - \frac{2v}{(y+1)} dy^2 \text{ y en } d^2 v \text{ es decir:}$$

$$d^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy^2$$

$$d^2 v = -\frac{2}{(y+1)^2} dx dy + \frac{2v}{(y+1)^2} dy^2$$

- 1965 Las funciones u y v de las variables x e y se dan por el sistema de ecuaciones implícitas: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Desarrollo

Diferenciando las ecuaciones es decir:

$$dx = \varphi'_u du + \varphi'_v dv \quad \dots (1) \quad dy = \psi'_u du + \psi'_v dv \quad \dots (2)$$

$$\text{de (1) despejamos } dv = \frac{dx - \varphi'_u du}{\varphi'_v}$$

reemplazando en (2) se tiene: $dy = \psi'_u du + \psi'_v dv = \psi'_u du + \psi'_v \left(\frac{dx - \phi'_u du}{\phi'_v} \right)$

$$\phi'_u dy = (\phi'_v \psi'_u - \psi'_v \phi'_u) du + \psi'_v dx \Rightarrow du = -\frac{\psi'_v dx}{\phi'_v \psi'_u - \psi'_v \phi'_u} + \frac{\phi'_u dy}{\phi'_v \psi'_u - \psi'_v \phi'_u} \dots (3)$$

de donde $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\psi'_v}{\phi'_v \psi'_u - \psi'_v \phi'_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\phi'_u}{\phi'_v \psi'_u - \psi'_v \phi'_u}$

reemplazando (3) en dv se tiene: $dv = -\frac{\psi'_u}{\phi'_u \psi'_v - \phi'_v \psi'_u} dx + \frac{\phi'_u}{\phi'_u \psi'_v - \phi'_v \psi'_u} dy$

de donde $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\psi'_u}{\phi'_u \psi'_v - \phi'_v \psi'_u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\phi'_u}{\phi'_u \psi'_v - \phi'_v \psi'_u}$

1966 a) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ y $Z = cv$

Desarrollo

Diferenciando las 3 ecuaciones se tiene:

$$dx = \cos v du - u \sin v dv \quad \dots (1)$$

$$dy = u \cos v dv + \sin v du \quad \dots (2)$$

$$dz = c dv \quad \dots (3)$$

de (1) despejando $du = -\frac{dx}{\cos v} + u \frac{\sin v}{\cos v} dv$

reemplazando en (2) se tiene: $dy = y \cos v dv + \sin v \left(\frac{dx}{\cos v} + u \frac{\sin v}{\cos v} dv \right)$

$$\cos v dy = u \cos^2 v dv + \sin v dx + u \sin^2 v dv$$

$$\cos v \, dy = u \, dv + \sin v \, dx$$

$$dv = -\frac{\sin v}{u} dx + \frac{\cos v}{u} dy \quad \text{reemplazando en (3)}$$

$$dz = -\frac{c \cdot \sin v}{u} dx + \frac{c \cdot \cos v}{u} dy \quad \text{de aquí}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -c \cdot \frac{\sin v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c \cdot \cos v}{u}, \quad \text{en forma similar para:}$$

b) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ si $x = u + v, y = u - v, z = uv$

c) Hallar dz , si $x = e^{u+v}, y = e^{u-v}, z = uv$

1967 $Z = F(r, \varphi)$ donde r y φ son funciones de las variables X e Y determinadas por el sistema de ecuaciones $X = r \cos \varphi, Y = r \sin \varphi$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x} \wedge \frac{\partial z}{\partial y}$

Desarrollo

Diferenciando: $dz = F'_r dr + F'_\varphi d\varphi \quad \dots (1)$

$$dx = \cos \varphi \, dr - r \sin \varphi \, d\varphi \quad \dots (2)$$

$$dy = \sin \varphi \, dr + r \cos \varphi \, d\varphi \quad \dots (3)$$

despejando de (2) $dr = \frac{dx + r \sin \varphi \, d\varphi}{\cos \varphi}$

reemplazando en (3) se tiene: $dy = \sin \varphi \left(\frac{dx + r \sin \varphi \, d\varphi}{\cos \varphi} \right) + r \cos \varphi \, d\varphi$

$$\cos \varphi \, dy = \sin \varphi \, dx + r \, d\varphi$$

$$dy = \frac{\cos \varphi - \sin \varphi \tan \varphi}{r} dx \quad \text{reemplazando en dr se tiene:}$$

$$dr = \frac{(1 - \sin^2 \varphi)dx + \sin \varphi \cos \varphi dy}{\cos \varphi}$$

reemplazando los valores de dr y dφ en (1) se tiene:

$$dz = (F_r' \cos \varphi - F_\varphi' \frac{\sin \varphi}{r})dx + (F_r' \sin \varphi + F_\varphi' \frac{\cos \varphi}{r})dy$$

$$\text{de donde: } \frac{\partial z}{\partial x} = F_r' \cos \varphi - F_\varphi' \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F_r' \sin \varphi + F_\varphi' \frac{\cos \varphi}{r}$$

- 1968** Considerando z como función de x e y, hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si: $x = a \cos \varphi \cos \psi$,
 $y = b \sin \varphi \cos \psi$, $z = c \sin \psi$.

Desarrollo

$$\text{Diferenciando} \quad dx = -a \sin \varphi \cos \psi d\varphi - a \cos \varphi \sin \psi d\psi \quad \dots (1)$$

$$dy = b \cos \varphi \cos \psi d\varphi - b \sin \varphi \sin \psi d\psi \quad \dots (2)$$

$$dz = c \cos \psi d\psi \quad \dots (3)$$

$$\text{de (1) se tiene: } \frac{\partial x}{\partial \psi} = -a \cos \varphi \sin \psi$$

$$\text{de (2) se tiene: } \frac{\partial y}{\partial \psi} = -b \sin \varphi \sin \psi$$

$$\text{de (3) se tiene: } \frac{\partial z}{\partial \psi} = c \cos \psi$$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = -\frac{c \cos \psi}{a \cos \varphi \sin \psi} = -\frac{c}{a} \sec \varphi \cdot \operatorname{ctg} \psi$$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = -\frac{c \cos \psi}{v \sin \varphi \sin \psi} = -\frac{c}{b} \csc(\psi) \operatorname{ctg}(\psi)$$

6.10. CAMBIO DE VARIABLES.-

1er. CAMBIO DE VARIABLES EN LAS EXPRESIONES QUE CONTIENEN DERIVADAS ORDINARIAS.-

2do. CAMBIO DE VARIABLES EN LAS EXPRESIONES QUE CONTIENEN DERIVADAS PARCIALES.-

1969 Transformar la ecuación: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + y = 0$ haciendo $x = e^t$

Desarrollo

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dt}{dx}} = e^{-t} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t} \left(\frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \text{ como } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

se tiene: $e^{2t} \cdot e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + 2e^t \cdot e^{-t} \frac{dy}{dt} + y = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0$

1970 Transformar la ecuación $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$ poniendo $x = \cos t$.

Desarrollo

$$x = \cos t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{\operatorname{sen} t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen} t} \cdot \frac{dy'}{dt} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

como $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$ se tiene que:

$$(1 - \cos^2 t) \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t} \cdot \frac{dy}{dt} \right] - \cos t \left(-\frac{1}{\operatorname{sen} t} \cdot \frac{dy}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \operatorname{ctg}(t) \frac{dy}{dt} + \operatorname{ctg}(t) \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

1971 Transformar las siguientes ecuaciones tomando y como argumento.

a) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$

Desarrollo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

reemplazando en la ecuación diferencial se tiene:

$$-\frac{\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} + 2y\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x}{dy^2} - 2y\frac{dx}{dy} = 0$$

b) $\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) - 3\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = 0$

Desarrollo

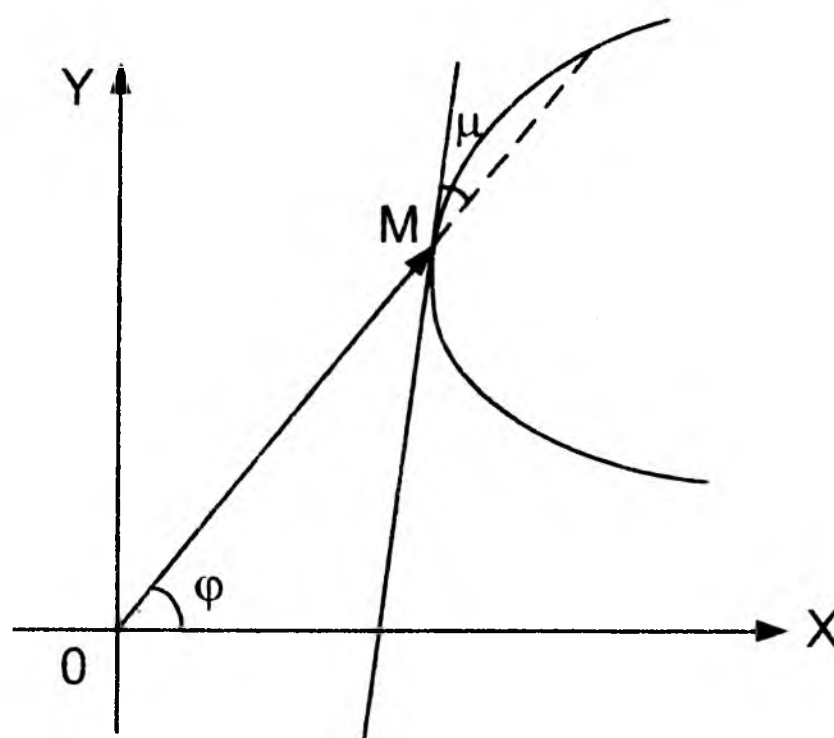
Se tiene que $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$ entonces:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2 x}{dy^2}\right)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - \frac{d^3 x}{dy^3} \left(\frac{dx}{dy}\right)^3}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^7}$$

reemplazando en la ecuación se tiene: $\frac{d^3 x}{dy^3} = 0$

1972 La tangente del ángulo u , formado por la tangente MT y el radio vector OM del punto de tangencia (fig 69) se expresa de la forma siguiente: $\operatorname{tgu} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}y'}$

transformar esta expresión, pasando a las coordenadas polares $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

Desarrollo

Diferenciando las ecuaciones $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \quad \dots(1) \quad dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \quad \dots(2)$$

dividiendo (2) entre (1) se tiene: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi}{\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi}$

$$\text{de donde } y' = \frac{\sin \varphi \frac{dr}{d\varphi} + r \cos \varphi}{\cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi} \quad \dots (1)$$

$$\text{además } \operatorname{tg} u = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} y'} \quad \dots (2)$$

$$\text{reemplazando (1) en (2) se tiene: } \operatorname{tg} u = \frac{\frac{\sin \varphi \frac{dr}{d\varphi} + r \cos \varphi}{\cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi} - \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi}}{1 + \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} \left(\frac{\sin \varphi \frac{dr}{d\varphi} + r \cos \varphi}{\cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi} \right)}$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{r \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} + r^2 \cos^2 \varphi - r \operatorname{sen} \varphi (\cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \operatorname{sen} \varphi)}{r \cos \varphi (\cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \operatorname{sen} \varphi) + r \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} \varphi \frac{dr}{d\varphi} + r \cos \varphi)}$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{r^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{r (\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{dr}{d\varphi}} = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \operatorname{tg} u = \frac{r}{r'}$$

1973 Expresar la fórmula de la curvatura de una línea: $k = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$ en coordenadas polares $x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$.

Desarrollo

Diferenciando las ecuaciones se tiene:

$$dx = \cos \varphi dr - r \operatorname{sen} \varphi d\varphi \quad \dots (1)$$

$$dy = \operatorname{sen} \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \quad \dots (2)$$

de (1) despejamos $d\varphi$ es decir: $d\varphi = \frac{\cos \varphi dr - dx}{r \operatorname{sen} \varphi}$

reemplazando en (2) se tiene: $dy = \operatorname{sen} \varphi dr + r \cos \varphi \left(\frac{\cos \varphi dr - dx}{r \operatorname{sen} \varphi} \right)$

$$r \operatorname{sen} \varphi dy + r \cos \varphi dx = r \operatorname{sen}^2 \varphi dr + r \cos^2 \varphi dr$$

$$r \operatorname{sen} \varphi dy + r \cos \varphi dx = r dr \Rightarrow dr = \operatorname{sen} \varphi dy + \cos \varphi dx$$

de donde $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen} \varphi$ además:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} \varphi \frac{dr}{d\varphi} + r \cos \varphi}{\cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \operatorname{sen} \varphi} \quad \text{por otra parte reemplazando } dr \text{ en } d\varphi \text{ es decir en:}$$

$$d\varphi = \frac{\cos \varphi dr - dx}{r \operatorname{sen} \varphi} = \frac{\cos \varphi (\operatorname{sen} \varphi dy + \cos \varphi dx - dx)}{r \operatorname{sen} \varphi}$$

$$d\varphi = \frac{\cos \varphi}{r} dy - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{r} dx \quad \text{de donde: } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{r}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

además $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ aquí hacemos los reemplazos respectivos se tiene:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{r} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \quad \text{calculando } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ se tiene: } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2} + r^2}{\left(\cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \operatorname{sen} \varphi\right)^3}$$

$$\text{reemplazando en } k = \frac{y''}{[(1 + (y')^2)]^{\frac{3}{2}}} \text{ se tiene que: } k = \frac{2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2} + r^2}{\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

1974 Transformar a las nuevas variables independientes u y v la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{si } u = x, \quad v = x^2 + y^2.$$

Desarrollo

Conocemos que: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

Pero como $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ entonces se tiene: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ además $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2x \quad \dots (1)$$

también se conoce que: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$ donde $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$

es decir: $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{\partial z}{\partial v}$... (2)

reemplazando en la ecuación: $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ se tiene:

$$y \left(\frac{\partial z}{\partial u} + 2x \frac{\partial z}{\partial v} \right) - x (2y \frac{\partial z}{\partial v}) = 0 \Rightarrow y \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \text{ de donde } \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

1975 Transformar a las nuevas variables independientes u y v la ecuación

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0 \text{ si } u = x, \quad v = \frac{y}{x}$$

Desarrollo

Se conoce que $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ donde $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$

luego se tiene: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v}$... (1)

además $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$ de donde se tiene: $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}$

Luego se tiene: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial v}$... (2)

Reemplazando (1) y (2) en la ecuación $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$

Se tiene que: $x(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v}) + y(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}) - z = 0$

$$y \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - z = 0 \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial u} - z = 0 \text{ o } u \frac{\partial z}{\partial u} - z = 0$$

- 1976** Transformar la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ a las coordenadas polares r y φ , poniendo $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Desarrollo

Como $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctg \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ además se conoce que:}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{r}{x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

reemplazando en esta ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = & \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \left(\frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial r} \\ & + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad \dots (1)$$

también se conoce que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

haciendo los reemplazamos en esta ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = & \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \\ & + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad \dots (2)$$

sumando (1) y (2) se tiene que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \dots (\alpha)$$

pero $r^2 = x^2 + y^2$ entonces reemplazando en (α)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

1977 Transformar la ecuación: $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Haciendo $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$

Desarrollo

Mediante la formula se tiene que: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

donde $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}$ luego se tiene: $\frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial v}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ de acuerdo al ejercicio 1976.

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} + \frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial z}{\partial v}$ de acuerdo al ejercicio anterior

reemplazando en la ecuación $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

$$x^2 \left(y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \right) - y^2 \left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} + \frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$$

$$4x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} - \frac{2x}{y} \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \Rightarrow 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} - \frac{1}{xy} \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \Rightarrow 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \cdot \partial v} = \frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

1978 Transformar la ecuación $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$ introduciendo las nuevas

variables independientes $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ y la nueva función

$w = \ln z - (x + y)$.

Desarrollo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$$

$w = \ln z - (x + y) \Rightarrow \ln z = w + x + y$ de donde: $z = e^{w+x+y}$ luego se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v}$$

reemplazando en la ecuación: $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$ y después simplificando

se tiene que $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$

1979 Transformar la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ tomando como nuevas

variables independientes $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$ tomando una nueva función $w = \frac{z}{x}$.

Desarrollo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x},$$

además como $w = \frac{z}{x} \Rightarrow z = xw$ de donde:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = w + x \frac{\partial w}{\partial x} = w + x \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = w + x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u} + x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{y}{x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

ahora reemplazando se tiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial u} + x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} + \frac{y^2}{x^3} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} + \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + y \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{y}{x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} + x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{y}{x^3} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}$$

reemplazando en la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ y simplificando se tiene

que: $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

1980 Transformar la ecuación: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ poniendo $u = x + y$,
 $v = x - y$, $w = xy - z$, donde $w = w(u, v)$.

Desarrollo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

de la ecuación $w = xy - z$ se tiene: $z = xy - w$ derivando se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

en forma similar para $\frac{\partial z}{\partial y}$ es decir:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \cdot \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \text{ reemplazando en la ecuación}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ se tiene } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$$

6.11. PLANO TANGENTE Y NORMAL A UNA SUPERFICIE.

1er. ECUACIONES DEL PLANO TANGENTE Y DE LA NORMAL PARA EL CASO EN QUE LA SUPERFICIE ESTÉ DADA EN FORMA EXPLÍCITA.-

Se llama plano tangente de una superficie en el punto M al plano en donde están situados todas las tangentes en el punto M, a las curvas trazadas en dicha superficie que pasan por el punto M.

Si la superficie está dada en forma explícita en un sistema de coordenadas cartesianas $z = f(x,y)$ donde: $f(x,y)$ es una función diferenciable, la ecuación del plano tangente en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ a la superficie es $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ donde $z_0 = f(x_0, y_0)$ \wedge x, y, z , son las coordenadas variables de los puntos del plano tangente.

La ecuación de la normal tiene la forma:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

2do. ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE Y DE LA NORMAL PARA EL CASO EN QUE LA SUPERFICIE ESTE DADA EN FORMA IMPLÍCITA.-

En este caso la ecuación dada en forma implícita es: $F(x,y,z) = 0$ y $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ y la ecuación del plano tangente es:

$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$ y la ecuación normal es:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

1981 Escribir las ecuaciones de los planos tangentes y las de las normales a las siguientes superficies en los puntos que se indican:

- a) Al paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, -2, 5)$.
- b) Al cono $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ en el punto $(4, 3, 4)$
- c) A la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, en el punto: $(R \cos \alpha, R \sin \alpha, R)$

Desarrollo

- a) Como $z = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ en el punto $x = 1$ e $y = -2$ se tiene que: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2, \frac{\partial z}{\partial y} = -4$ y la ecuación del plano en el punto $(1, -2, 5)$ es: $z - 5 = 2(x - 1) - 4(y + 2)$ que simplificando es: $z - 2x + 4y + 5 = 0$.

La ecuación de la normal en el punto $(1, -2, 5)$ es: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$

- b) Sea $f(x, y, z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8}$ que esta en forma implícita: de donde

$$f'_x = \frac{x}{8}, f'_y = \frac{2y}{9}, f'_z = -\frac{z}{4} \text{ en el punto } (4, 3, 4) \text{ se tiene que:}$$

$$f'_x = \frac{1}{2}, f'_y = \frac{2}{3}, f'_z = -1. \text{ Luego la ecuación del plano tangente es:}$$

$$\frac{1}{2}(x-4) + \frac{2}{3}(y-3) - 1(z-4) = 0 \text{ y la ecuación de la normal es:}$$

$$\frac{2(x-4)}{1} = \frac{3(y-3)}{2} = \frac{z-4}{-1} \text{ que escrito de otra forma es:}$$

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{6}$$

c) Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz$ de donde se tiene: $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, $f'_z = 2z - 2R$ en el punto: $(R \cos \alpha, R \sin \alpha, R)$ se tiene $f'_x = 2R \cos \alpha$, $f'_y = 2R \sin \alpha$, $f'_z = 0$. Luego la ecuación del plano tangente es: $2R \cos \alpha (x - R \cos \alpha) + 2R \sin \alpha (y - R \sin \alpha) = 0$ de donde al simplificar se tiene: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0$ y la ecuación de la normal es: $\frac{x - R \cos \alpha}{2R \cos \alpha} = \frac{y - R \sin \alpha}{2R \sin \alpha} = \frac{z - R}{0}$

1982 ¿En qué punto del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ la normal forma ángulos iguales con los ejes coordenados?

Desarrollo

Para que la normal forme ángulos iguales con los ejes coordenados los cosenos directores deben de ser iguales es decir:

$$f'_x = f'_y = f'_z \text{ donde } f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

de donde $f'_x = \frac{2x}{a^2}$, $f'_y = \frac{2y}{b^2}$, $f'_z = \frac{2z}{c^2}$ y de acuerdo a la condición se tiene

que: $\frac{2x}{a^2} = \frac{2y}{b^2} = \frac{2z}{c^2}$ de esta igualdad despejamos: $y = \frac{b^2}{a^2}x$, $z = \frac{c^2}{a^2}x$

esto reemplazando en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ se tiene que

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ y esto reemplazando en}$$

$$y = \frac{b^2}{a^2}x, \quad z = \frac{c^2}{a^2}x \text{ se tiene: } y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad z = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1983 Por el punto $M(3,4,12)$ de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ pasan planos perpendiculares a los ejes OX, OY. Escribir la ecuación del plano que pasa por las tangentes a las secciones que originan aquello, en el punto común M.

Desarrollo

$$\text{Como } x^2 + y^2 + z^2 = 169 \Rightarrow z = \sqrt{169 - x^2 - y^2}$$

$$\text{De donde } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} \text{ en la cual:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \text{ es perpendicular al eje OY.}$$

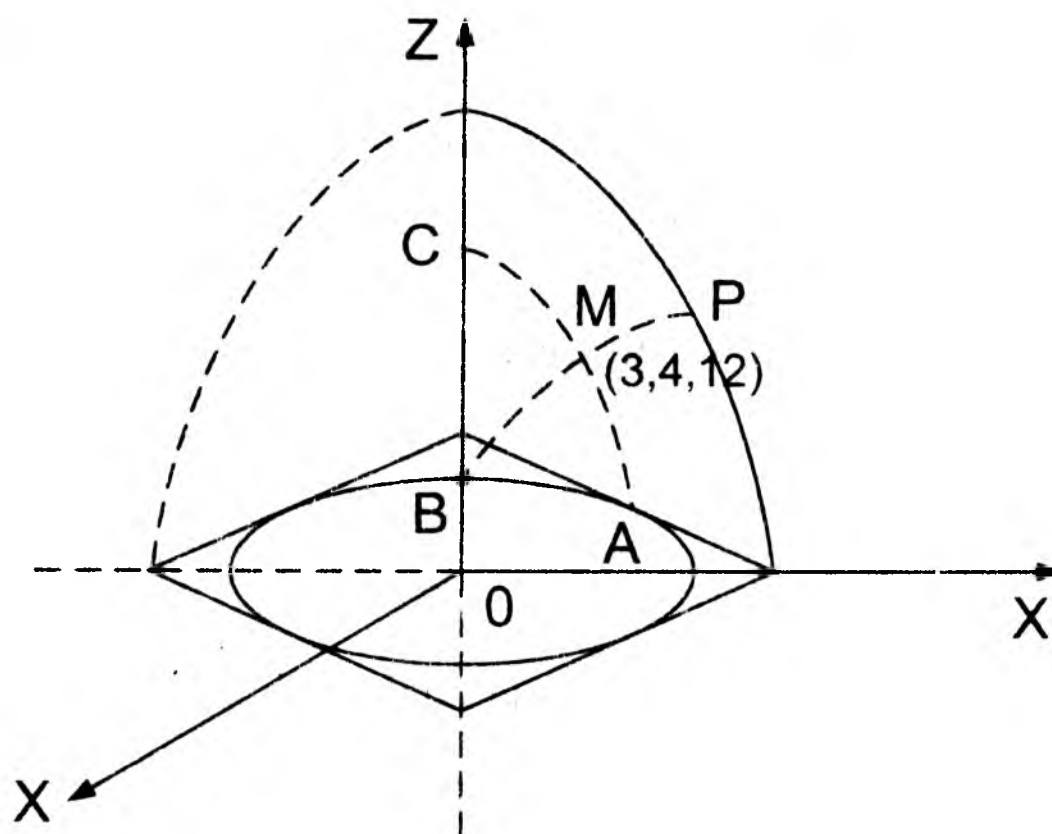
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} \text{ es perpendicular al eje OX y para el punto } M(3,4,12) \text{ se tiene:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3}$$

De acuerdo al grafico se tiene BMP es paralela al plano XOZ, y la curva BMP es paralela al plano YOZ, el plano que pasa por la curva BMP es perpendicular al eje OY, el plano que pasa por la curva AMC es perpendicular al eje OX y la pendiente a la curva BMP en el punto M es $\frac{\partial z}{\partial x}$ y al pendiente a la curva AMC

en el punto M es $\frac{\partial z}{\partial y}$ y el plano que comprende estas dos tangentes es:

$$z - 12 = -\frac{1}{4}(x - 3) - \frac{1}{3}(y - 4) \text{ de donde: } 3x + 4y + 12z - 169 = 0$$



- 1984** Demostrar, que la ecuación del plano tangente a la superficie central de 2do orden $ax^2 + by^2 + cz^2 = k$ en su punto $M(x_0, y_0, z_0)$ tiene la forma $ax_0x + by_0y + cz_0z = k$.

Desarrollo

Sea $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - k$ de donde: $f'_x = 2ax$, $f'_y = 2by$, $f'_z = 2cz$

En el punto M es $f'_x = 2ax_0$, $f'_y = 2by_0$, $f'_z = 2cz_0$ y la ecuación del plano es: $2ax_0(x - x_0) + 2by_0(y - y_0) + 2cz_0(z - z_0) = 0$

de donde $ax_0x + by_0y + cz_0z - (ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2) = 0$

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = k$$

- 1985** Dada la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, trazar a ella planos tangentes que sean paralelos al plano $x + 4y + 6z = 0$.

Desarrollo

Sea $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$ de donde: $f'_x = 2x$, $f'_y = 4y$, $f'_z = 6z$

Calculando en el punto (x_0, y_0, z_0) se tiene: $f'_x = 2x_0$, $f'_y = 4y_0$, $f'_z = 6z_0$

además los planos tangentes son paralelos al plano $x + 4y + 6z = 0$ entonces:

$$2x_0 = 1, \quad 4y_0 = 4, \quad 6z_0 = 6 \quad \text{de donde se tiene: } x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1$$

por lo tanto el plano paralelo a: $x + 4y + 6z$ es $(x - \frac{1}{2}) + 4(y - 1) + 6(z - 1) = 0$

$$\text{de donde } 2x + 8y + 12z - 21 = 0$$

- 1986** Dado el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, trazar a los planos tangentes que interceptan en los ejes coordenados segmentos de igual longitud.

Desarrollo

Sea $f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ de donde se tiene:

$$f'_x = \frac{2x}{a^2}, \quad f'_y = \frac{2y}{b^2}, \quad f'_z = \frac{2z}{c^2}$$

Calculando en el punto (x_0, y_0, z_0) esta en el elipsoide, entonces se tiene:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \quad \dots (1)$$

la ecuación del plano tangente es: $(x - x_0)\frac{2x_0}{a^2} + (y - y_0)\frac{2y_0}{b^2} + (z - z_0)\frac{2z_0}{c^2} = 0$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} \quad \text{de donde} \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1 \quad \dots (2)$$

ahora encontramos los puntos de intercepción con los ejes coordenadas:

$$\text{para } y = z = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2}{x_0}$$

$$x = z = 0 \Rightarrow y = \frac{b^2}{y_0}$$

$$x = y = 0 \Rightarrow z = \frac{c^2}{z_0}$$

es decir que los puntos de intercepción son: $(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0)$, $(0, \frac{b^2}{y_0}, 0)$, $(0, 0, \frac{c^2}{z_0})$

además los segmentos que se interceptan son iguales, o sea:

$$x = y = z \Rightarrow \frac{a^2}{x_0} = \frac{b^2}{y_0} = \frac{c^2}{z_0} \quad \text{como } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \quad \text{se tiene:}$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^4} x_0^2 + \frac{c^2}{a^4} x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0^2 (a^2 + b^2 + c^2) = a^4, \quad \text{de donde}$$

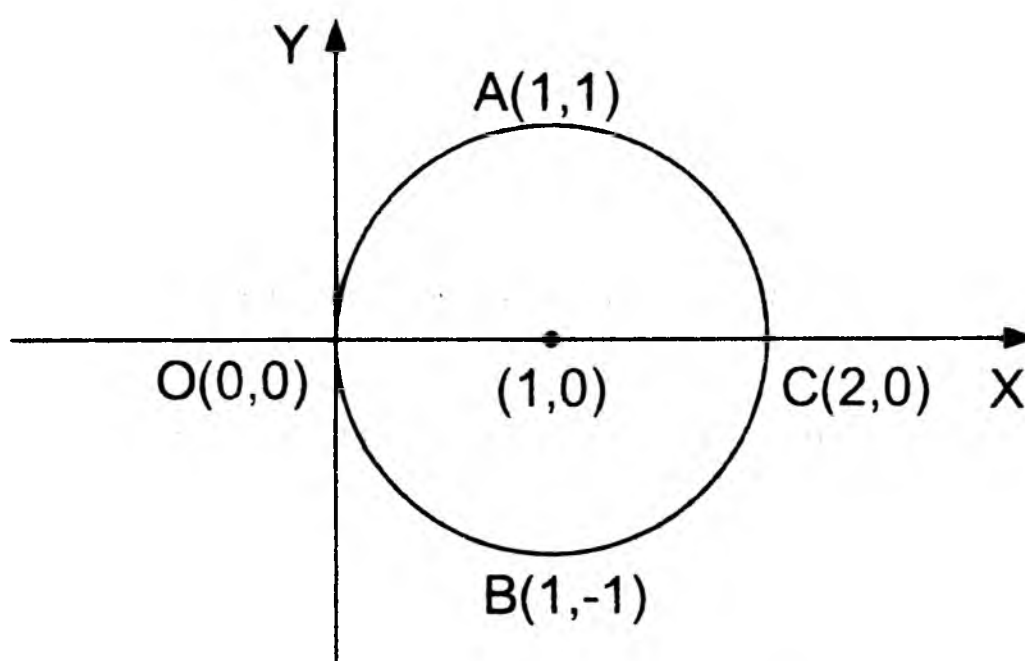
$$x_0 = \frac{a^2}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad y_0 = \frac{b^2}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad z_0 = \frac{c^2}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \dots (3)$$

reemplazando (3) en (2) se tiene: $x + y + z = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

- 1987** Hallar en la superficie $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ los puntos en que los planos tangentes a ella sean paralelos a los planos coordenados.

Desarrollo

Proyectamos sobre el plano XOY la superficie $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ haciendo $z = 0$. Luego tenemos $x^2 + y^2 - 2x = 0$ lo que es lo mismo $(x-1)^2 + y^2 = 1$ que nos representan una circunferencia cuyo grafico es:



Por los puntos A y B pasan planos tangentes paralelos al plano XOZ donde: $A(1,1,0) \wedge B(1,-1,0)$ y por los puntos $O(0,0,0)$ y $C(2,0,0)$ pasan planos tangentes paralelos al plano YOZ.

- 1988** Demostrar, que los planos tangentes a la superficie $xyz = m^3$ forman con los planos coordenados tetraedros de volumen constante.

Desarrollo

Consideremos el punto $p(x_0, y_0, z_0)$ en la superficie $f(x, y, z) = xyz - m^3$ en donde $f'_x = y_0 z_0$, $f'_y = x_0 z_0$, $f'_z = x_0 y_0$.

Luego la ecuación del plano tangente es:

$$(x - x_0)y_0 z_0 + (y - y_0)x_0 z_0 + (z - z_0)x_0 y_0 = 0$$

de donde $xy_0 z_0 + yx_0 z_0 + zx_0 y_0 = 3m^3$

Luego para $y = z = 0$ se tiene $x = \frac{3m^3}{y_0 z_0}$

Para $x = z = 0$ se tiene $y = \frac{3m^3}{x_0 z_0}$

Para $x = y = 0$ se tiene $z = \frac{3m^3}{x_0 y_0}$

Además el volumen de un tetraedro es: $V = 0.1178 a^3 = 0.1178 xyz$

$$V = 0.1178 \left(\frac{3m^3}{y_0 z_0} \right) \left(\frac{3m^3}{x_0 y_0} \right) \left(\frac{3m^3}{x_0 y_0} \right) \Rightarrow V = \frac{(0.1178)(27)}{m^3} \text{ es constante}$$

- 1989** Demostrar, que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ interceptan en los ejes coordenados segmentos cuya suma es constante.

Desarrollo

Tomemos un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$

de donde $f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, f'_z = \frac{1}{2\sqrt{z_0}}$

La ecuación del plano tangente a la superficie es: $\frac{x - x_0}{2\sqrt{x_0}} + \frac{y - y_0}{2\sqrt{y_0}} + \frac{z - z_0}{2\sqrt{z_0}} = 0$

de donde: $\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$

Ahora interceptamos con los ejes coordenados para:

$$y = z = 0 \text{ se tiene } x = \sqrt{ax_0}$$

$$x = z = 0 \text{ se tiene } y = \sqrt{ay_0}$$

$$x = y = 0 \text{ se tiene } z = \sqrt{az_0}$$

sumando los segmentos se tiene:

$$x + y + z = \sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Luego $x + y + z = a$ es una constante

1990 Demostrar, que el cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ y la esfera

$x^2 + y^2 + \left(\frac{z - b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$ son tangentes entre si en los puntos $(0, \pm b, c)$

Desarrollo

Consideremos $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ y

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + \left(\frac{z - b^2 + c^2}{c}\right)^2 - \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$ en el punto $(0, \pm b, c)$

se tiene: $f'_x = 0$, $f'_y = \pm \frac{2}{b}$, $f'_z = -\frac{2}{c}$ y $g'_x = 0$, $g'_y = \pm 2b$, $g'_z = -\frac{2b^2}{c}$

Luego para que sean tangentes ambas superficies es necesario que sean proporcionales las derivadas parciales como: $(0, \pm 2b, -\frac{2b^2}{c})$ es proporcional a

$(0, \pm \frac{2}{b}, -\frac{2}{c})$ puesto que al multiplicar por b^2 se obtiene los términos de la primera.

- 1991** Se llama ángulo entre dos superficies en el punto de su intersección, al ángulo que forman los planos tangentes a dichas superficies en el punto que se considera ¿Qué ángulo forman su punto de intersección el cilindro

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ y la esfera } (x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ en el punto } M\left(\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}R}{2}, 0\right)$$

Desarrollo

Consideremos $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$

$$g(x, y, z) = (x - R)^2 + y^2 + z^2 - R^2 \text{ en el punto: } M\left(\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}R, 0\right)$$

$$\text{se tiene que } f'_x = R, \quad f'_y = 3R, \quad g'_x = -R, \quad g'_y = \sqrt{3}R, \quad g'_z = 0$$

$$\text{se conoce que } \cos \theta = \frac{f'_x \cdot g'_x + f'_y \cdot g'_y + f'_z \cdot g'_z}{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2 + (g'_x)^2 + (g'_y)^2 + (g'_z)^2}$$

$$\cos \theta = \frac{2R^2}{4R^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

- 1992** Se llaman las superficies que se cortan entre si formando un ángulo recto en cada uno de los puntos de la línea de su intercepción. Demostrar que las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (esfera), $y = x \operatorname{tg} \varphi$ (plano) y $z^2 = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}^2 \psi$ cono que son superficies coordenadas del sistema de coordenadas esféricas r, φ, ψ , son ortogonales entre si.

Desarrollo

Como las coordenadas esféricas son r, φ, ψ , se tiene que:

$$x = r \cos \varphi \cos \psi$$

$$y = r \cos \varphi \sin \psi$$

$z = r \operatorname{sen} \varphi$ y consideremos $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, $g(x, y) = y - x \operatorname{tg} \varphi$,

$h(x, y, z) = z^2 - (x^2 + y^2) \operatorname{tg} \psi$ de donde $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, $f'_z = 2z$, $g'_x = -\operatorname{tg} \varphi$, $g'_y = 1$, $h'_x = -2x \operatorname{tg} \psi$, $h'_y = -2y \operatorname{tg} \psi$, $h'_z = 2z$

si (x_0, y_0, z_0) es un punto de la superficie entre dos

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2, \quad y_0 = x_0 \operatorname{tg} \varphi, \quad z_0 = (x_0^2 + y_0^2) \operatorname{tg} \psi$$

para que las superficies sean perpendiculares deben cumplirse que:

$$f'_x \cdot g'_x + f'_y \cdot g'_y + f'_z \cdot g'_z = 0, \quad f'_x \cdot h'_x + f'_y \cdot h'_y + f'_z \cdot h'_z = 0$$

$$h'_x \cdot g'_x + h'_y \cdot g'_y + h'_z \cdot g'_z = 0 \quad \text{es decir:} \quad -2x_0 \operatorname{tg} \varphi + 2y_0 = 0 = -2y_0 + 2y_0 = 0$$

$$-4x_0 \operatorname{tg}^2 \varphi - 4y_0^2 \operatorname{tg}^2 \psi + 4z_0^2 = -4z_0 + 4z_0 = 0$$

$$2x_0 \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \psi - 2y_0 \operatorname{tg}^2 \varphi = 2y_0 \operatorname{tg}^2 \varphi - 2y_0 \operatorname{tg}^2 \varphi = 0$$

- 1993 Demostrar, que todos los planos tangentes a la superficie cónica $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ en su punto $M(x_0, y_0, z_0)$ donde $x_0 \neq 0$ pasan por el origen de coordenadas.

Desarrollo

Como $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ entonces en el punto M

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \quad \text{luego la ecuación del plano es:}$$

$$z - z_0 = f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(x - x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y - y_0)$$

simplificando se tiene: $x\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y - y_0) - z = 0$

que es la ecuación del plano que pasa por el origen

- 1994** Hallar las proyecciones del elipsoide $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = 0$ sobre los planos coordenados.

Desarrollo

Para hallar la proyección sobre el plano XOY se hace $z = 0$ obteniéndose $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ en forma similar para el plano XOZ se hace $y = 0$ de donde $x^2 + z^2 = 1$ y por ultimo para el plano YOZ se hace $x = 0$ de donde $y^2 + z^2 - 1 = 0$.

- 1995** Demostrar que la normal, en cualquier punto de la superficie de revolución $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ ($f' \neq 0$) corta a su eje de rotación.

Desarrollo

Como $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ entonces se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(\sqrt{x^2 + y^2})x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'(\sqrt{x^2 + y^2})y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La ecuación de la normal es: $\frac{(X - x)\sqrt{x^2 + y^2}}{xf'(\sqrt{x^2 + y^2})} = \frac{(Y - y)\sqrt{x^2 + y^2}}{yf'(\sqrt{x^2 + y^2})} = \frac{Z - z}{-1}$

$$\text{de donde } Z = z - \frac{(X-x)\sqrt{x^2+y^2}}{x f'(\sqrt{x^2+y^2})} \quad \text{y} \quad Z = z - \frac{(Y-y)\sqrt{x^2+y^2}}{y f'(\sqrt{x^2+y^2})}$$

donde x, y, z son las variables de la recta normal.

$$\text{Si } x = 0 \text{ se tiene } z = f(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{f'(\sqrt{x^2+y^2})}$$

Corta al eje de rotación para cualquier valor de x e y .

$$\text{Si } y = 0 \text{ se tiene } z = f(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{f'(\sqrt{x^2+y^2})}$$

Corta al eje de rotación para cualquier valor de x e y .

6.12. FÓRMULA DE TAYLOR PARA LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.-

Suponiendo que la función $f(x, y)$ alrededor del punto (a, b) tiene derivadas parciales continuas hasta el orden $(m - 1)$ inclusive. Entonces se verifica la fórmula de Taylor.

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \frac{1}{1!} [f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)] \\ & + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(a, b)(x-a)^2 + f''_{yy}(a, b)(y-b)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b)] \\ & + \dots + \frac{1}{n!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(a, b) + R_n(x, y) \quad \dots (1) \text{donde} \end{aligned}$$

$$R(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b)), \quad (0 < \theta < 1)$$

en otras anotaciones:

$$\begin{aligned}
 f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \frac{1}{1!} [hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)] \\
 &\quad + \frac{1}{2!} [h^2 f''_{xx}(x, y) + 2hkf''_{xy}(x, y) + k^2 f''_{yy}(x, y)] \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k) \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{o bien: } \Delta f(x, y) &= df(x, y) + \frac{1}{2!} a^2 f(x, y) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x, y) \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k) \quad \dots (3)
 \end{aligned}$$

para el caso particular cuando $a = b = 0$ la formula (1) recibe el nombre de Maclourin.

- 1996** Desarrollar $f(x+h, y+k)$ en potencias enteras y positivas de h y k , si $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

Desarrollo

$$f'_x = 2xa + 2by \Rightarrow f''_{xx} = 2a$$

$$f''_{xy} = 2b$$

$$f'_y = 2bx + 2cy \Rightarrow f''_{yy} = 2c$$

$$\begin{aligned}
 f(x+h, y+k) &= f(x, y) + hf'_x + kf'_y + \frac{1}{2} (h^2 f''_{xx} + 2hkf''_{xy} + k^2 f''_{yy}) \\
 &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2hax + 2hby + 2kbx + 2kcy + \frac{1}{2} (h^2 2a + 2hk^2 b + k^2 2c)
 \end{aligned}$$

$$f(x+h, y+k) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2h(ax + by) + 2k(bx + cy) + ah^2 + bhk + ck^2$$

- 1977 Desarrollar la función $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ para la fórmula de Taylor en un entero del punto $(-2, 1)$.

Desarrollo

Calculamos sus derivadas en el punto $(-2, 1)$

$$f'_x = 0, \quad f''_{xx} = -2, \quad f'_y = 0, \quad f''_{yy} = 6, \quad f''_{xy} = 2$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + [f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2] \end{aligned}$$

$$f(x, y) = 1 - (x - 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2$$

- 1978 Hallar el incremento que recibe la función $f(x, y) = x^2y$ al pasar de los valores $x = 1, y = 1$ a los valores $x_1 = 1 + h, y_1 = 1 + k$

Desarrollo

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1) = hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y) + \\ &\quad + \frac{1}{2} [h^2 f''_{xx}(x, y) + 2khf''_{xy}(x, y) + k^2 f''_{yy}(x, y)] + \\ &\quad + \frac{1}{6} [h^3 f'''_{xxx}(x, y) + 3h^2 kf'''_{xxy}(x, y) + 3hk^2 f'''_{xyy}(x, y) + k^3 f'''_{yyy}(x, y)] \end{aligned}$$

Luego $f'_x(1, 1) = 2, \quad f''_{xx}(1, 1) = 2, \quad f''_{xy}(1, 1) = 2, \quad f'_y(1, 1) = 1, \quad f''_{yy} = 0,$
 $f'''_{xxx}(1, 1) = 0, \quad f'''_{xxy}(1, 1) = 2, \quad f'''_{xyy}(1, 1) = 0, \quad f'''_{yyy}(1, 1) = 0$

Reemplazando $\Delta f(x, y) = 2h + k + h^2 + 2hk + kh^2$

- 1999 Desarrollar la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ por la fórmula de Taylor en el entorno del punto $(1, 1, 1)$.

Desarrollo

Se conoce que:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & f(a, b, c) + f'_x(a, b, c)(x - a) + f'_y(a, b, c)(y - b) + f'_z(a, b, c)(z - c) + \\ & + \frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b, c)(x - a)^2 + f''_{yy}(a, b, c)(y - b)^2 + f''_{zz}(a, b, c)(z - c)^2 + \\ & + 2f''_{xy}(a, b, c)(x - a)(y - b) + 2f''_{yz}(a, b, c)(y - b)(z - c) + \\ & + 2f''_{xz}(a, b, c)(y - b)(z - c) + 2f''_{xz}(a, b, c)(x - a)(z - c)] \end{aligned}$$

como $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ en el punto $(1, 1, 1)$ se tiene: $f'_x = 0$, $f''_{xx} = 2$, $f'_y = 0$, $f''_{yy} = 2$, $f'_z = 0$, $f''_{zz} = 2$, $f''_{xy} = 2$, $f''_{yz} = -1$, $f''_{xz} = 0$, reemplazando se tiene:

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) - (y - 1)(z - 1)$$

- 2000 Desarrollar $f(x + h, y + k, z + l)$ en potencias enteras y positivas de h , k y l si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

Desarrollo

Se conoce que: $f(x + h, y + k, z + l) = f(x, y, z) + hf'_x + kf'_y + lf'_z +$

$$+ \frac{1}{2} [h^2 f''_{xx} + k^2 f''_{yy} + l^2 f''_{zz} + 2hkf''_{xy} + 2hlf''_{xz} + 2klf''_{yz}] \dots (1)$$

como $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ entonces

$$f'_x = 2x - 2y - 2z \Rightarrow f''_{xx} = 2$$

$$f'_y = 2y - 2x - 2z \Rightarrow f''_{yy} = 2$$

$$f'_z = 2z - 2x - 2y \Rightarrow f''_{zz} = 2$$

$$f''_{xy} = -2, f''_{xz} = -2, f''_{yz} = -2$$

reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + 2h(x-y-z) + 2h(y-x-z) + 2l(z-x-y) + \\ + h^2 + k^2 + l^2 - 2hk - 2hl - 2kl$$

2001 Desarrollar por la fórmula de McLaurin hasta los términos de 2° orden inclusive, la función $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

Desarrollo

Se conoce que:

$$f(x, y) = f(0, 0) + xf'_x(0, 0) + yf'_y(0, 0) + \\ + \frac{1}{2}(x^2 f''_{xx}(0, 0) + 2xyf''_{xy}(0, 0) + y^2 f''_{yy}(0, 0)) \dots (1)$$

como $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y \Rightarrow f(0, 0) = 0$

$$f'_x(x, y) = e^x \operatorname{sen} y \Rightarrow f'_x(0, 0) = 0$$

$$f''_{xx}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y \Rightarrow f''_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy}''(x, y) = e^x \cos y \Rightarrow f_{xy}'''(0, 0) = 1$$

$$f_y'(x, y) = e^x \cos y \Rightarrow f_y'(0, 0) = 1$$

$$f_{yy}''(x, y) = -e^x \sin y \Rightarrow f_{yy}''(0, 0) = 0$$

$$f(x, y) = f(0, 0) + xf_x'(0, 0) + yf_y'(0, 0) +$$

$$+ \frac{1}{2!} (x^2 f_{xx}''(0, 0) + 2xy f_{xy}''(0, 0) + y^2 f_{yy}''(0, 0)) +$$

$$+ \frac{1}{3!} (x^3 f_{xxx}'''(0, 0) + 2x^2 f_{xxy}'''(0, 0) + 3x^2 f_{xyy}'''(0, 0) + y^3 f_{yyy}'''(0, 0))$$

$$+ \frac{1}{4!} (x^4 f_{xxxx}^{iv}(0, 0) + 4x^3 y f_{xxx}^{iv}(0, 0) + 6x^2 y^2 f_{xxy}^{iv}(0, 0) + 4xy^3 f_{xyy}^{iv}(0, 0) + y^4 f_{yyy}^{iv}(0, 0))$$

como $f(x, y) = \cos x \cos y$ en el punto $(0, 0)$ se tiene:

$$f(0, 0) = 0, \quad f_x' = 0, \quad f_{xx}'' = 1, \quad f_{xxx}''' = 0, \quad f_{xxxx}^{iv} = 1, \quad f_y' = 0, \quad f_{yy}'' = -1, \quad f_{yyy}''' = 0, \\ f_{yyyy}^{iv} = 1, \quad f_{xy}'' = 0, \quad f_{xxy}''' = 0, \quad f_{xyy}''' = 0, \quad f_{xxx}^{iv} = 0, \quad f_{xxy}^{iv} = 1, \quad f_{xyy}^{iv} = 0$$

reemplazando y simplificando se tiene:

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2 + y^2}{2!} + \frac{x^4 + 6x^2 y^2 + y^4}{4!}$$

- 2003** Desarrollar por la fórmula de Taylor, en un entorno del punto $(1, 1)$ hasta los términos de 2° orden inclusive, la función $f(x, y) = y^x$

Desarrollo

Se conoce que:

$$f(x, y) = f(1, 1) + \frac{1}{1!} [f'_x(1, 1)(x-1) + f'_y(1, 1)(y-1) + f''_{xx}(1, 1)(x-1)^2 + \\ + f''_{yy}(1, 1)(y-1)^2 + 2f''_{xy}(1, 1)(x-1)(y-1)]$$

como $f(x, y) = y^x$ en el punto (1,1) se tiene: $f(1, 1) = 1$, $f'_x = 0$, $f'_y = 1$,
 $f''_{xx} = 0$, $f''_{yy} = 0$, $f''_{xy} = 1$, ahora reemplazando se tiene:

$$f(x, y) = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1)$$

2004 Desarrollar por la formular de Taylor, en un entorno del punto (1,-1) hasta los términos de 3er. orden inclusive, la función $f(x, y) = e^{x+y}$

Desarrollo

Se conoce que:

$$f(x, y) = f(1, -1) + \frac{1}{1!} [f'_x(1, -1)(x-1) + f'_y(1, -1)(y+1)] + \\ + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(1, -1)(x-1)^2 + f''_{yy}(1, -1)(y+1)^2 + 2f''_{xy}(1, -1)(x-1)(y+1)] \\ + \frac{1}{3!} [f'''_{xxx}(1, -1)(x-1)^3 + 3f'''_{xxy}(1, -1)(x-1)^2(y+1) \\ + 3f'''_{xyy}(1, -1)(x-1)(y+1)^2 + f'''_{yyy}(1, -1)(y+1)^3]$$

como $f(x, y) = e^{x+y}$ en el punto (1,-1) se tiene: $f(1, -1) = 1$, $f'_x = 1$, $f''_{xx} = 1$,
 $f'''_{xxx} = 1$, $f'_y = 1$, $f''_{yy} = 1$, $f'''_{yyy} = 1$, $f'''_{xxy} = 1$, $f'''_{xyy} = 1$, reemplazando se tiene:

$$f(x, y) = 1 + (x-1) + (y+1) + \frac{1}{2!} [(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2(x-1)(y+1)]$$

$$+\frac{1}{3!}[(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y+1) + 3(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3]$$

$$f(x, y) = 1 + [(x-1) + (y+1)] + \frac{[(x-1) + (y+1)]^2}{2!} + \frac{[(x-1) + (y+1)]^3}{3!}$$

2005 Deducir las fórmulas aproximadas, con exactitud hasta los términos de 2do orden, con relación a las magnitudes α y β para las expresiones:

a) $\operatorname{arctg} \frac{1+\alpha}{1-\beta}$

b) $\sqrt{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}}$

Si $|\alpha|$ y $|\beta|$ son pequeños en comparación con 1.

Desarrollo

a) Sea $f(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{1+\alpha}{1-\beta}$, de donde se tiene:

$$f'_\alpha = \frac{1-\beta}{(1+\alpha)^2 + (1-\beta)^2}, \quad f''_{\alpha\alpha} = \frac{2(1-\beta)(1+\alpha)}{[(1+\alpha)^2 + (1-\beta)^2]^2}$$

$$f'_\beta = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)^2 + (1-\beta)^2}, \quad f''_{\beta\beta} = \frac{2(1-\beta)(1+\alpha)}{[(1+\alpha)^2 + (1-\beta)^2]^2}$$

$$f''_{\alpha\beta} = \frac{(1-\beta)^2 - (1-\alpha)^2}{[(1+\alpha)^2 + (1-\beta)^2]^2}, \text{ haciendo } \alpha = \beta = 0$$

$$\text{se tiene: } f'_\alpha = \frac{1}{2}, \quad f''_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}, \quad f'_\beta = \frac{1}{2}, \quad f''_{\beta\beta} = \frac{1}{2}$$

$f(0,0) = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$ reemplazando en la fórmula de Taylor se tiene:

$$\operatorname{arctg} \frac{1+\alpha}{1-\beta} = 45^\circ + \frac{1}{1!} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} \right) = 45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}$$

b) Consideremos $f(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}}$ de donde

$$f'_\alpha = \frac{m(1+\alpha)^{m-1}}{\sqrt[4]{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}}},$$

$$f''_{\alpha\alpha} = \frac{m}{4} \sqrt[4]{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}} (m-1)(1+\alpha)^{m-2} - (1+\alpha)^{m-1} \frac{m(1+\alpha)^{m-1}}{\sqrt[4]{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}}}$$

$$f'_\beta = \frac{n(1+\beta)^{n-1}}{\sqrt[4]{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}}}$$

$$f''_{\beta\beta} = \frac{n}{4} \sqrt[4]{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}} (n-1)(1+\beta)^{n-2} - (1+\beta)^{n-1} \left(\frac{n(1+\beta)^{n-1}}{\sqrt[4]{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}}} \right)$$

$$f''_{\alpha\beta} = \left(\frac{n}{2} (1+\beta)^{n-1} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}} \right) \cdot \left[\frac{m}{2} (1+\alpha)^{m-1} \right]$$

para $\alpha = \beta = 0$ se tiene: $f(0,0) = 1$, $f'_\alpha = \frac{m}{4}$, $f''_{\alpha\alpha} = \frac{m}{16}(3m-4)$, $f'_\beta = \frac{n}{4}$,

$f''_{\beta\beta} = \frac{n}{16}(3n-4)$, $f''_{\alpha\beta} = \frac{mn}{16}$, reemplazando se tiene:

$$\sqrt{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}} = 1 + \frac{m\alpha + n\beta}{4} + \frac{1}{2!} \left[\frac{m}{16}(3m-4)\alpha^2 + \frac{n}{16}(3n-4)\beta^2 - \frac{mn\beta}{16} \right]$$

- 2006** Aplicando la fórmula de Taylor, hasta los términos de 2do orden, calcular aproximadamente: a) $\sqrt{1.03} \sqrt{0.98}$

Desarrollo

a) Sea $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt{y}$ en el punto $(1, 1)$ se tiene:

$$f'_x = \frac{1}{2}, f''_{xx} = -\frac{1}{4}, f'_y = \frac{1}{2}, f''_{yy} = -\frac{1}{4}, f''_{xy} = \frac{1}{4} \text{ entonces}$$

$$f(x+h, y+k) = f(1+0.03, 1-0.02)$$

$$f(1+0.03, 1-0.02) = f(1, 1) + \frac{1}{2}(0.03) - \frac{1}{4}(0.02) + \frac{1}{2!}[(0.03)^2(-\frac{1}{4}) - 2(0.03)(0.02)\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(0.02)^2] = 1.0081$$

b) Consideremos $f(x, y) = x^y$ en el punto $(1, 2)$ se tiene que $f(1, 2) = 1$.

$$f'_x = 2, f''_{xx} = 2, f'_y = 0, f''_{yy} = 0, f''_{xy} = 1$$

Luego $f(x+h, y+k) = f(1-0.05, 2+0.01)$

$$f(1-0.05, 2+0.01) = 1 - 0.05(2) + \frac{1}{2}(0.05)^2(2) - 2(0.05)(0.01)(0.95)^{2.01}$$

$$= 1 - 0.1 + (0.05)^2 - (0.05)(0.01) = 0.902$$

- 2007** Sea Z una función implícita de x e y , determinada por la ecuación $z^3 - 2xz + y = 0$ que toma el valor de $z = 1$ cuando $x = 1$ e $y = 1$. Escribir varios términos del desarrollo de la función Z en potencias crecientes de las diferencias $x-1$ e $y-1$.

Desarrollo

Calcularemos su diferencial: $3z^2 dz - 2(x dz + z dx) + dy = 0$

De donde $dz = \frac{2z dx - dy}{3z^2 - 2x}$ entonces $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z}{3z^2 - 2x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3z^2 - 2x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2 \frac{\partial z}{\partial x} (3z^2 - 2x) - 2z(6z \frac{\partial z}{\partial x} - 2)}{(3z^2 - 2x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6z \frac{\partial z}{\partial y}}{(3z^2 - 2x)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{6z \frac{\partial z}{\partial x} - 2}{(3z^2 - 2x)^2}$$

para $x = y = 1 = z$ se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -16, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 10, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6. \text{ Luego}$$

$$z = f(x, y) = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) + \frac{1}{2}(-16(x - 1)^2 - 6(y - 1)^2 + 20(x - 1)(y - 1))$$

$$f(x, y) = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 - 3(y - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1)$$

6.13. EXTREMO DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES.-

1ra. DEFINICIÓN DE EXTREMO DE UNA FUNCIÓN.

Una función $f(x, y)$ tiene un máximo y un mínimo $f(a, b)$ en el punto $p(a, b)$, si para todos los puntos $P_1(x, y)$ diferentes de $p(x, y)$, de un entorno suficientemente pequeño del punto P , se cumple la desigualdad $f(a, b) > f(x, y)$ o $f(a, b) < f(x, y)$, el máximo o mínimo de una función se denomina extremo, en forma similar se termina los extremos para una función de tres variables.

2do. CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS.

Los puntos, en que la función diferenciable $f(x,y)$ pueda alcanzar un extremo (es decir, los llamados puntos estacionarios) se hallan resolviendo el sistema de ecuaciones

$$f'_x(x,y) = 0, \quad f'_y(x,y) = 0 \quad \dots (1)$$

(Que es la condición necesaria para la existencia de extremo)

El sistema (1) es equivalente a la ecuación $df(x,y) = 0$, en el caso general, en el punto extremo $P(a,b)$ de la función $f(x,y)$ o no existe $df(a,b)$ o $df(a,b) = 0$.

3ro. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMO.

Si $P(a,b)$ es un punto estacionario de la función $f(x,y)$ es decir $df(a,b) = 0$; entonces

- i) Si $d^2 f(a,b) < 0$, siendo $dx^2 + dy^2 > 0$, $f(a,b)$ es un máximo de la función $f(x,y)$.
- ii) Si $d^2 f(a,b) > 0$, siendo $dx^2 + dy^2 > 0$, $f(a,b)$ es un mínimo de la función $f(x,y)$.
- iii) Si $d^2 f(a,b)$ cambia de signo, $f(a,b)$ no es punto extremo de la función $f(x,y)$

Las condiciones mencionadas equivalen a:

$$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0 \quad \text{y} \quad A = f''_{xx}(a,b), \quad B = f''_{xy}(a,b), \quad C = f''_{yy}(a,b) \quad ,$$

formamos el discriminante $\Delta = AC - B^2$, entonces:

- i) Si $\Delta > 0$, la función tiene un extremo en el punto $P(a,b)$ y es un máximo si $A < 0$ (o $C < 0$) y un mínimo si $A > 0$ (o $C > 0$).

- ii) Si $\Delta < 0$, en el punto $P(a,b)$ no existe extremo.
- iii) Si $\Delta = 0$ en el punto $P(a,b)$ no existe extremo (si $\Delta = 0$ la existencia del extremo de la función en el punto $P(a,b)$ queda indeterminada es necesario continuar la investigación).

4to. CASO DE FUNCIONES DE MUCHAS VARIABLES.-

Para las funciones de tres o más variables las condiciones necesarias para la existencia de extremos son análogas que los casos anteriores.

5to. EXTREMO CONDICIONADO.-

Se llama extremo condicionado de una función $f(x,y)$ en el caso más simple, al máximo o mínimo de esta función, alcanzando con la condición de que sus argumentos estén ligados entre si por la ecuación $\varphi(x,y) = 0$ (ecuación de enlace) para hallar el extremo condicionado de la función $f(x,y)$ con la ecuación $\varphi(x,y) = 0$ se forma la llamada función de Lagrange.

$F(x,y) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$ donde λ es un multiplicador constante indeterminado, y se busca el extremo ordinario de esta función auxiliar. Las condiciones necesarias para que haya un extremo se reduce el sistema de tres ecuaciones.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (2)$$

con tres incógnitas, x , y , λ de las que, en general, se pueden deducir estas.

El problema de la existencia y el carácter del extremo condicionado se resuelve sobre la base dl estudio del signo que tiene la segunda diferencial de la función de Lagrange.

$$d^2 F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 > 0 \quad (1)$$

La función $f(x, y)$ tendrá un máximo condicionado, si $d^2 F < 0$ y un mínimo condicionado, si $d^2 F > 0$; en particular, si el discriminante Δ para la función

Para el sistema de valores x, y, λ que investigamos, obtenido de (2), con la condición de que dx y dy estén relacionados entre si por la ecuación

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0, \quad (dx^2 + dy^2 \neq 0).$$

La función $f(x, y)$ tendrá un máximo condicionado, si $d^2 F < 0$ y un mínimo condicionado, si $d^2 F > 0$; en particular, si el discriminante Δ para la función $F(x, y)$ en el punto estacionario es positivo, en este punto habrá un máximo condicionado de la función $f(x, y)$ si $A < 0$ (o $C < 0$) y un mínimo condicionado, si $A > 0$ (o $C > 0$).

En forma similar para el caso de las funciones de tres variables:

Investigar si tiene extremos las siguientes funciones de dos variables.

2008 $z = (x-1)^2 + 2y^2$

Desarrollo

Sea $z = f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2$ hallaremos los puntos estacionarios, para esto encontramos las derivadas parciales:

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(1, 0) \text{ punto estacionario}$$

ahora encontramos las derivadas parciales de 2do. orden en el punto $p(1, 0)$.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

Formando el discriminante se tiene: $\Delta = AC - B^2 = 2(4) - 0 = 8 > 0 \wedge A > 0$

Luego en el punto $P(1,0)$ la función tiene un mínimo es decir: para $x = 1$, $y = 0$ se tiene: $z_{\min} = 0$

2009 $z = (x-1)^2 - 2y^2$

Desarrollo

$$z = (x-1)^2 - 2y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x-1) = 0$$

para encontrar los puntos estacionarios se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ de donde } x = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ de donde } y = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \bigg|_{(1,0)} = 2(-4) - 0 < 0$$

como $\Delta < 0$, la función no tiene extremos.

2010 $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

Desarrollo

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y - 2) = 1$$

para encontrar los puntos estacionarios se tiene: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$\text{de donde se tiene: } \left. \begin{array}{l} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ resolviendo } \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \bigg|_{(1,0)} = (2)(2) - 1^2 = 3 > 0$$

como $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \bigg|_{(1,0)} > 0 \Rightarrow$ existe un mínimo en el punto $p(1,0)$.

$$\text{Es decir } z_{\min} = 1^2 + 1(0) + 0 - 2(1) - 0 \Rightarrow z_{\min} = -1$$

2011 $z = x^3 y^2 (6 - x - y), (x > 0, y > 0)$

Desarrollo

$$z = x^3 y^2 (6 - x - y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = x^2 y^2 (18 - 4x - 3y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 12x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2$$

encontraremos los puntos estacionarios para esto hacemos $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

es decir:
$$\left. \begin{aligned} x^2 y^2 (18 - 4x - 3y) &= 0 \\ 12x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene:}$$

$x = 0, y = 0, p_1(0,0), x = 3, y = 2, p_2(3,2)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 36x^2 y^2 - 12x^2 y^2 - 6xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^3 - 2x^4 - 6x^3 y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 36x^2 y - 8x^3 y - 9x^2 y^2$$

para el punto $p_1(0,0)$ se tiene: $\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0 \Rightarrow \nexists \text{ extremo}$

ahora veremos para el punto $P_2(3,2)$

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 11664 \text{ y como } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$$

\Rightarrow se tiene un máximo en el punto $P_2(3,2)$ donde $z_{\max} = 106$.

2012 $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

Desarrollo

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y$$

encontraremos los puntos estacionarios para esto hacemos: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

es decir:
$$\left. \begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y &= 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene:}$$

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow P_1(0,0), x = \sqrt{2}$$

$$y = -\sqrt{2} \Rightarrow P_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2} \Rightarrow P_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Para los puntos P_2 y P_3 se tiene que: $\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \wedge \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

entonces la función tiene un mínimo en $z_{\min} = -8$ y para el punto $P_1(0,0)$ se tiene $\Delta = 0$ no tiene extremo.

2013

$$z = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Desarrollo

$$z = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{xy}{ab} \sqrt{a^2 b^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{ab} \sqrt{a^2 b^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 y}{ab \sqrt{a^2 b^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a^2 b^2 y - 2x^2 y - y^3}{ab \sqrt{a^2 b^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{ab} \sqrt{a^2 b^2 - x^2 - y^2} - \frac{xy^2}{ab \sqrt{a^2 b^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a^2 b^2 x - 2xy^2 - x^3}{ab \sqrt{a^2 b^2 - x^2 - y^2}}$$

haciendo $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ para obtener los puntos estacionarios se tiene:

$$\left. \begin{aligned} a^2 b^2 y - 2x^2 y - y^3 &= 0 \\ a^2 b^2 x - 2xy^2 - x^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene:}$$

$$x = 0, y = 0, x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}$$

Luego para los puntos $P_1(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}})$ y $P_2(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}})$ se tiene:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \text{ y como } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$$

entonces la función tiene un máximo en $Z_{\max} = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$

y para los puntos $P_3(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}})$ y $P_4(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}})$ se tiene:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \text{ y como } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$$

entonces la función tiene un mínimo en $Z_{\min} = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ para el punto $P_5(0,0)$

se tiene $\Delta = 0$ no tiene extremo.

2014 $z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$

Desarrollo

$$z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y}{3\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$$

Haciendo $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ para obtener los puntos estacionarios es decir:

$$x = 0 ; y = 0 \text{ y para este punto se tiene: } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ y } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

y como para cualquier valor de x e y se resta de 1 de la grafica

$$z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}} \text{ se tiene } z_{\max} = 1 \text{ esto ocurre en el punto } (0,0).$$

2015 $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

Desarrollo

$$z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = (2x - 2xy^2 - 2x^3)e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2y - 2x^2y - 2y^3)e^{-(x^2 + y^2)}$$

haciendo $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ para obtener los puntos estacionarios es decir:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2xy^2 - 2x^3 = 0 \\ 2y - 2x^2y - 2y^3 = 0 \end{array} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene:}$$

$x = 0, y = 0, x^2 + y^2 = 1$ luego para el punto $p(0,0)$ se tiene:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$$

La función tiene un mínimo en $z_{\min} = 0$ para el caso en que $x^2 + y^2 = 1$ se

tiene $\Delta > 0$ y como $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, la función tiene un máximo en $z_{\max} = \frac{1}{e}$

2016
$$z = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

Desarrollo

$$z = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2 - x + xy + 1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 + xy + y + 1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

Haciendo $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ para obtener los puntos estacionarios es decir:

$$\left. \begin{array}{l} y^2 - x + xy + 1 = 0 \\ -(x^2 + xy + y + 1) = 0 \end{array} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene:}$$

$x = 1, y = -1$ de donde en este punto: $\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$

como: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow$ la función tiene un máximo en $Z_{\max} = \sqrt{3}$

2016
$$z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad (x > 0, y > 0)$$

Desarrollo

$$z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 1$$

$$\text{Hacemos } \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ es decir: } \left. \begin{array}{l} -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema se tiene: $x = 4, y = 2$

$$\text{en donde para este punto se tiene: } \Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$$

entonces la función tiene un mínimo en: $z_{\min} = 6$

2016 $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

Desarrollo

$$z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + 2x - 2y^2)e^{x-y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2y^2 - x^2 - 4y)e^{x-y}$$

$$\text{haciendo } \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ es decir:}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + 2x - 2y^2 = 0 \\ 2y^2 - x^2 - 4y = 0 \end{array} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene que:}$$

$x = y = 0, x = 4, y = -2$. Luego para el punto $P_1(0,0)$ se tiene:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0 \text{ no tiene extremo y para el punto } P_2(-4, 2)$$

$$\text{se tiene: } \Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \text{ y como } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$$

entonces la función tiene un máximo en $z_{\max} = 8e^{-2}$

Hallar los extremos de las funciones de tres variables:

2017 $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

Desarrollo

$u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ derivando se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - y + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2$$

haciendo $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ para obtener los puntos estacionarios es decir:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{array} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene: } x = \frac{2}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}$$

además $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$ además se conoce que:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz$$

en el punto $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ se tiene $d^2u > 0$ y como $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$

entonces la función tiene un mínimo en $Z_{\min} = -\frac{4}{3}$

2018 $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, (x > 0, y > 0, z > 0)$

Desarrollo

Como $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{4x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}$$

Haciendo $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ para obtener los puntos estacionarios es decir:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{y^2}{4x^2} &= 0 \\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} &= 0 \\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene: } x = \pm \frac{1}{2}, y = \pm 1, z = \pm 1$$

como $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{2x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{2z}{y^2}$$

para el punto $(\frac{1}{2}, 1, 1)$, $d^2u > 0$ y como $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$ la función tiene un mínimo

en $z_{\min} = 4$ y para el punto: $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$ no se tiene en cuenta de acuerdo a las condiciones del problema.

Hallar los extremos de las funciones Z, dadas de forma implícita:

2019 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

Desarrollo

Consideremos $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ de donde

$$f'_x = 2x - 2, f'_y = 2y + 4, f'_z = 2z - 6 \text{ haciendo } f'_x = f'_y = f'_z = 0$$

para obtener los puntos estacionarios es decir:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{array} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene que: } x = 1, y = -2, z = 3$$

como $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ determina dos funciones es decir:

$z = 3 \pm \sqrt{25 - (x-1)^2 - (y+2)^2}$ para una función en el punto $x = 1, y = -2$ se tiene un máximo en $z_{\max} = 8$ y para la otra función en el punto $x = 1, y = -2$, se tiene un mínimo en $z_{\min} = -2$.

2020 $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

Desarrollo

Sea $f(x, y, z) = x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$ de donde se tiene:

$$f'_x = 3x^2 - 3, f'_y = -2y + 4, f'_z = 2z + 1 \text{ de donde } f'_x = f'_y = 0$$

para obtener los puntos estacionarios es decir $x = \pm 1, y = 2$. Luego para el punto $P_1(1, 2)$ se tiene:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \text{ y como } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0 \text{ la función tiene un mínimo en}$$

$z_{\min} = 1$; para el punto $P_1(-1, 2)$ se tiene > 0 y $A < 0 \Rightarrow$ la función tiene un máximo en $z_{\max} = -2$.

Determinar los extremos condicionados de las funciones:

2021 $Z = xy$ si $x + y = 1$

Desarrollo

Sea $F(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1)$ de donde se tiene:

$$F'_x = y + \lambda, \quad F'_y = x + \lambda, \quad F''_{xx} = 0, \quad F''_{xy} = 1, \quad F''_{yy} = 0$$

formamos el sistema siguiente

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

diferenciando $x + y = 1$ se tiene $dx + dy = 0$ además $d^2F = -2dx^2 < 0$ entonces la función tiene un máximo en: $Z_{\max} = \frac{1}{4}$ para el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

2022 $z = x + 2y$, si $x^2 + y^2 = 5$

Desarrollo

Sea $F(x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ de donde

$$F'_x = 1 + 2\lambda x, \quad F'_y = 2 + 2\lambda y, \quad F''_{xx} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 2\lambda$$

ahora formamos el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{array} \right. \quad \text{resolviendo el sistema se tiene:}$$

$$x = 1, y = 2, \lambda = -\frac{1}{2}, \quad x = -1, y = -2, \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\text{como } d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2) \text{ para } x = 1, y = 2, \lambda = -\frac{1}{2}$$

Se tiene $d^2F < 0 \Rightarrow$ la función tiene un máximo en $z_{\max} = 5$

para $x = -1, y = -2, \lambda = \frac{1}{2}$ se tiene: $d^2F > 0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo en $z_{\min} = -5$

2023 $z = x^2 + y^2$, si $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Desarrollo

Sea $F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1)$ de donde:

$$F'_x = 2x + \frac{\lambda}{2}, \quad F'_y = 2y + \frac{\lambda}{3}, \quad F''_{xx} = 2, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 2$$

ahora formamos el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + \frac{\lambda}{2} = 0 \\ 2y + \frac{\lambda}{3} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{resolviendo el sistema se tiene:}$$

$$x = \frac{18}{3}, \quad y = \frac{12}{13}, \quad \lambda = -\frac{72}{13}$$

para este punto se tiene $d^2F = 2(dx^2 + dy^2) > 0$

la función tiene un máximo en $Z_{\max} = \frac{36}{13}$

2024 $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, si $y - x = \frac{\pi}{4}$

Desarrollo

Sea $F(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda(y - x - \frac{\pi}{4})$ de donde: $F'_x = -2 \cos x \cdot \text{sen } x - \lambda$,

$$F'_y = -2 \cos y \text{ sen } y, F''_{xx} = -2 \cos 2x, F''_{yy} = -2 \cos 2y, F''_{xy} = 0$$

Formamos el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2 \cos x \text{ sen } x - \lambda = 0 \\ -2 \cos y \text{ sen } y + \lambda = 0 \\ y - x = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sen } 2x = -\text{sen } 2y$$

$$\text{como } y = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{sen } 2x = -\text{sen}(2x + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{sen } 2x = -\text{sen } 2x \cos \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{\pi}{2} \cos 2x \Rightarrow \text{sen } 2x = -\cos 2x$$

$$\text{sen } 2x = -\cos^2 x + \text{sen}^2 x \Rightarrow 2 \text{sen } x \cos x = 2 \text{sen}^2 x - 1, \text{ de donde}$$

$$\text{sen}^4 x - 8 \text{sen}^2 x + 1 = 0, \text{ de donde } \text{sen } x = \pm \sqrt{\frac{2 \pm 2}{4}} \Rightarrow \text{sen } x = \pm 0.9238 \text{ y,}$$

$\sin x = \pm 0.3856$ de estas soluciones tomamos las siguientes:

para $x = 67.5^\circ$, $y = 157.5^\circ$

$$\sin x = 0.9238 \Rightarrow x = \arcsen(0.9238) = \frac{3\pi}{8} + k\pi \quad \text{donde } k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\sin x = -0.3826 \Rightarrow x = \arcsen(-0.3826)$$

$x = \frac{7}{8}\pi + k\pi$ para $k = 0, 1, 2$, en este punto $d^2F > 0$ la función tiene un mínimo en el punto $(\frac{3}{8}\pi + k\pi, \frac{3}{8}\pi + k\pi)$

$$Z_{\min} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \text{ y para el punto } (\frac{7\pi}{8} + k\pi, \frac{9\pi}{8} + k\pi)$$

de donde $d^2F < 0 \Rightarrow$ la función tiene un máximo en: $Z_{\max} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

2025 $u = x - 2y + 2z$, si $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Desarrollo

Sea $F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$, de donde se tiene:

$$F'_x = 1 + 2\lambda x, \quad F'_y = -2 + 2\lambda y, \quad F'_z = 2 + 2\lambda z, \quad F''_{xx} = 2\lambda, \quad F''_{yy} = 2\lambda, \quad F''_{zz} = 2\lambda,$$

$$F''_{xy} = 0, \quad F''_{yz} = 0, \quad F''_{xz} = 0. \quad \text{Formamos el sistema siguiente:}$$

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 + 2x = 0 \\ -2 + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{array} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene que:}$$

$$x = \pm 1, y = \pm 2, z = \pm 2, \lambda = \mp \frac{1}{2} \text{ además } d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

para los valores $x = 1, y = 2, z = 2, \lambda = -\frac{1}{2}$

se tiene $d^2F < 0 \Rightarrow$ la función tiene un máximo en $z_{\max} = 9$

para los valores $x = -1, y = -2, z = -2, \lambda = \frac{1}{2}$ se tiene $d^2F > 0$

entonces la función tiene un máximo $z_{\min} = -9$.

2026 $u = x^2 + y^2 + z^2$, si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b > c > 0$)

Desarrollo

Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)$ de donde se tiene:

$$F'_x = 2x + \frac{2\lambda x}{a^2}, \quad F'_y = 2y + \frac{2\lambda y}{b^2}, \quad F'_z = 2z + \frac{2\lambda z}{c^2}, \quad F''_{xx} = 2 + \frac{2\lambda}{a^2}$$

$$F''_{yy} = 2 + \frac{2\lambda}{b^2}, \quad F''_{zz} = 2 + \frac{2\lambda}{c^2}, \quad F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0$$

Ahora formamos el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + \frac{2x}{a^2} = 0 \\ 2y + \frac{2y}{b^2} = 0 \\ 2z + \frac{2z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{array} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene que:}$$

para $x = \pm a, y = z = 0, \lambda = -a^2$

$y = \pm b, x = z = 0, \lambda = -b^2$

$z = \pm c, x = y = 0, \lambda = -c^2$

para $x = \pm a, d^2F < 0$ tiene máximo en $U_{\max} = a$

para $z = \pm c, d^2F > 0$ tiene mínimo en $U_{\min} = c$

2027 $u = xy^2z^3$, si $x + y + z = 12, (x, y, z > 0)$

Desarrollo

Sea $F(x, y, z) = xy^2z^3 + \lambda(x + y + z - 12)$ de donde: $F'_x = y^2z^3 + \lambda$,

$F'_y = 2xyz^3 + \lambda$, $F'_z = 3xy^2z^2 + \lambda$, $F''_{xx} = 0$, $F''_{yy} = 2xz^3$, $F''_{zz} = 6xy^2z$,

$F''_{xy} = 2yz^3$, $F''_{yz} = 6xy$, $F''_{xz} = 3y^2z^2$, formamos el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2z^3 + \lambda = 0 \\ 2xyz^3 + \lambda = 0 \\ 3xy^2z^2 + \lambda = 0 \end{array} \right. \text{ resolviendo el sistema se tiene:}$$

$x = 2, y = 4, z = 6, \lambda = -3456$

donde este punto $d^2F < 0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo en $U_{\min} = 2 \cdot 4^2 \cdot 6^3$

2028 $u = xyz$ con las condiciones $x + y + z = 5, xy + yz + zx = 8$

Desarrollo

Sea $F(x, y, z) = xyz + \lambda(x + y + z - 5) + \beta(xy + yz + xz - 8)$ de donde:

$$F'_x = yz + \lambda + \beta y + \beta z, \quad F'_y = xz + \lambda + \beta x + \beta z, \quad F'_z = xy + \lambda + \beta y + \beta x$$

$$\text{además se tiene: } F''_{xx} = F''_{yy} = F''_{zz} = 0, \quad F''_{xy} = z + \beta, \quad F''_{yz} = x + \beta,$$

$$F''_{xz} = y + \beta \text{ ahora formamos el sistema siguiente:}$$

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} yz + \lambda + \beta y + \beta z = 0 \\ xz + \lambda + \beta x + \beta z = 0 \\ xy + \lambda + \beta y + \beta x = 0 \\ x + y + z = 5 \\ xy + yz + xz = 8 \end{array} \right. \text{ resolviendo el sistema se tiene que:}$$

$$\text{para } \lambda = \frac{16}{9}, \quad \beta = -\frac{4}{3} \text{ se tiene: } P_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \quad P_2\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \quad P_3\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{para } \lambda = 4, \quad \beta = -2, \text{ se tiene: } P_4(2, 2, 1), \quad P_5(2, 1, 2), \quad P_6(1, 2, 2)$$

como las condiciones son:

$$x + y + z = 5, \quad xy + yz + xz = 8 \text{ diferenciando se tiene } dx + dy + dz = 0$$

$$(y + z)dx + (x + z)dy + (y + x)dz = 0$$

resolviendo en términos del diferencial dy se tiene:

$$dx = -\frac{z-y}{z-x} dy, \quad dz = \frac{x-y}{z-x} dy$$

$$d^2F = (z + \lambda)dx dy + (x + \beta)dy dz + (y + \beta)dx dz \quad \text{para } \lambda = \frac{16}{9}, \quad \beta = -\frac{4}{3} \text{ en}$$

$$\text{estos puntos } d^2F < 0 \text{ entonces la función tiene un máximo en } U_{\max} = \frac{112}{27} \text{ y}$$

$$\text{para los valores } \lambda = 4, \quad \beta = -2 \text{ en estos puntos } d^2F > 0 \text{ la función tiene un mínimo en } U_{\min} = 4$$

2029 Demostrar la desigualdad $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, si $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

INDICACIÓN: Buscar el máximo de la función $u = xyz$ con la condición de que $x + y + z = s$

Desarrollo

Sea $F(x,y,z) = xyz + \lambda(x + y + z - s)$ de donde: $F'_x = yz + \lambda$, $F'_y = xz + \lambda$, $F'_z = xy + \lambda$ además: $F''_{xx} = F''_{yy} = F''_{zz} = 0$, $F''_{xy} = z$, $F''_{yz} = x$, $F''_{xz} = y$

ahora formamos el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} yz + \lambda = 0 \\ xz + \lambda = 0 \\ xy + \lambda = 0 \\ x + y + z = s \end{array} \right.$$

resolviendo el sistema se tiene que para $\lambda = -\frac{s^2}{9}$; $x = y = z = \frac{s}{3}$

como $d^2F < 0$ la función tiene un máximo para el punto $(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3})$ en

$$u_{\max} = \frac{s^3}{27}$$

Luego la desigualdad $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ es verdadera con lo cual queda demostrada.

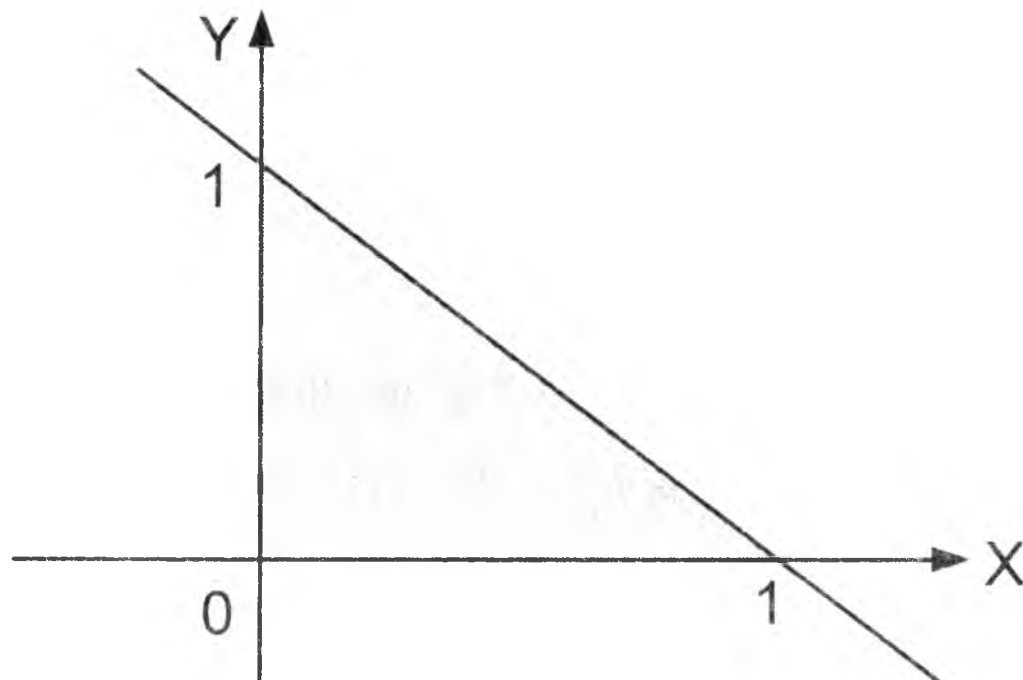
2030 Determinar el máximo absoluto de la función: $z = 1 + x + 2y$ en las regiones: _

a) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$

b) $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x - y \leq 1$

Desarrollo

a)



Examinando en la frontera de la región.

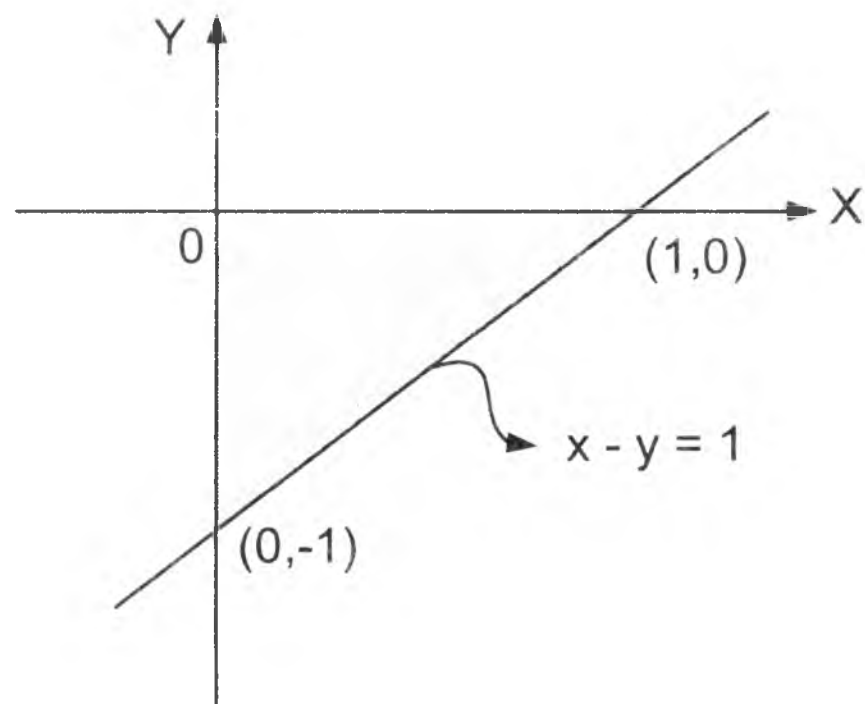
Cuando $x = 0$ se tiene $z = 1 + 2y$ como $x + y \leq 1$ entonces $z_{\max} = 3$ en el punto $(0,1)$ y además en el punto $(0,0)$ se tiene $Z \text{ min abs} = 1$

Ahora cuando $y = 0$ se tiene $z = 1 + x$ como $x + y \leq 1$ entonces $z \text{ max abs} = 2$ para el punto $(1,0)$ y para el punto $(0,0)$ se tiene $Z \text{ min abs} = 1$, luego el valor máximo absoluto es $z = 3$ para el punto $(0,1)$.

b) Cuando $x = 0$ se tiene $z = 1 + 2y$, $-1 \leq y \leq 0$ como $x - y \leq 1$ (ver grafico) $\Rightarrow Z \text{ max abs} = 1$ en el punto $(0,0)$ y en el punto $(0,-1)$ se tiene $z_{\min} = -1$.

Ahora cuando $y = 0$ se tiene $z = 1 + x$, $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow z \text{ max} = 2$ en el punto $(1,0)$ y en el punto $(0,0)$ se tiene: $Z \text{ min abs} = 1$.

Luego el valor máximo absoluto es $z = 2$ para valores de $x = 1$, $y = 0$.



2031 Determinar el máximo y mínimo absoluto de las funciones:

a) $z = x^2 y$

b) $z = x^2 - y^2$ en la región $x^2 + y^2 \leq 1$

Desarrollo

a) Suponiendo que $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2$

como $z = x^2 y = y(1 - y^2) = y - y^3$ de donde $\frac{dz}{dy} = 1 - 3y^2 = 0$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ luego se tiene para el punto $(\pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$Z \text{ max abs} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ y para el punto $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm \sqrt{\frac{1}{3}})$, $Z \text{ min abs} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

b) Sea $f(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ de donde:

$f'_x = 2x + 2\lambda x$, $f'_y = 2\lambda y - 2y$, $f''_{xx} = 2 + 2\lambda$, $f''_{yy} = 2\lambda - 2$, $f''_{xy} = 0$

ahora formamos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 2\lambda y - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \text{ resolviendo el sistema se tiene:}$$

para $\lambda = -1$, $x = 0$, $y = \pm 1$

$\lambda = 1$, $x = \pm 1$, $y = 0$

Luego se tiene que para el punto $(\pm 1, 0)$ se tiene $z_{\max \text{ abs}} = 1$ y para el punto $(0, \pm 1)$ se tiene $z_{\min \text{ abs}} = -1$

Para la región dentro del círculo el valor de la función es menor que 1 y a menos -1.

2032 Determinar el máximo y mínimo absoluto de las funciones $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ en la región $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Desarrollo

Como $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x + \cos(x + y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \cos(x + y) \quad \text{y para encontrar los puntos}$$

$$\text{estacionarios hacemos } \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ es decir: } \left\{ \begin{array}{l} \cos x + \cos(x + y) = 0 \\ \cos y + \cos(x + y) = 0 \end{array} \right\}$$

de donde $\cos x + \cos y = 0 \Rightarrow x = y, \quad x = -y$

reemplazando en la ecuación $\cos x + \cos(x + y) = 0$

$$\cos x + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{\pi}{3}$ como $x = y \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$ como $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ está dentro de las condiciones y para el caso de que $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$ que no está dentro las condiciones del ejercicio. Luego para el punto $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ se tiene un máximo interno

$Z_{\max_{abs}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ y para el punto $(0,0)$ se tiene un mínimo en la frontera
 $Z_{\min_{abs}} = 0$.

- 2033 Determinar el máximo y mínimo absoluto de la función $z = x^3 + y^3 - 3xy$ en la región $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$

Desarrollo

Como $z = x^3 + y^3 - 3xy$ entonces se tiene: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$ y

para encontrar los puntos estacionarios hacemos $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ es decir:

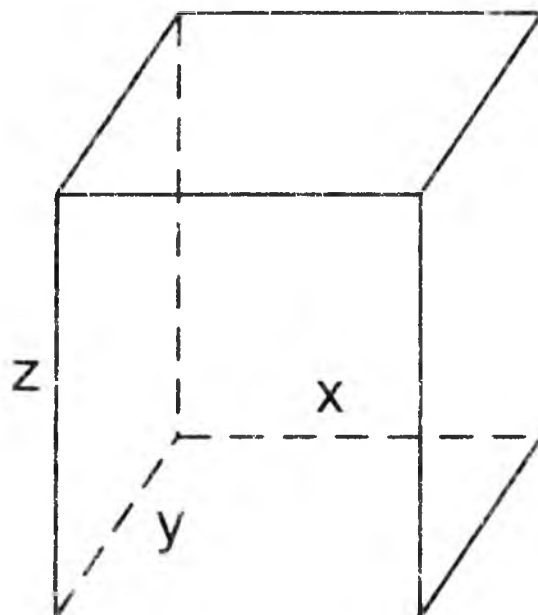
$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{resolviendo el sistema se tiene: } (0,0) \text{ y } (1,1)$$

ahora de acuerdo a las condiciones del problema se tiene cuando $x = 2$, $y = -1$ se tiene un máximo absoluto (máximo de frontera) en $z = 13$ y cuando $x = y = 1$ se tiene un mínimo absoluto (mínimo interno) en $z = -1$ y cuando $x = 0$, $y = -1$ se tiene mínimo de frontera en $z = -1$.

6.14. PROBLEMAS DE DETERMINACIÓN DE LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS DE LAS FUNCIONES.-

- 2034 Entre todos los paralelepípedos rectangulares de volumen V dado, hallar aquel cuya superficie total sea menor.

Desarrollo



Por condición del problema se tiene:

$V = xyz$ de donde $z = \frac{V}{xy}$ además la superficie es:

$$A = 2xy + 2xz + 2yz \text{ de donde: } A = 2xy + \frac{2xv}{xy} + \frac{2yv}{xy} \Rightarrow A = 2xy + \frac{2v}{y} + \frac{2v}{x}$$

$$\text{Derivando se tiene: } \frac{\partial A}{\partial x} = 2y - \frac{2v}{x^2}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = 2x - \frac{2v}{y^2}$$

Haciendo $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial y} = 0$ para obtener los puntos estacionarios se tiene:

$$\left. \begin{aligned} 2y - \frac{2V}{x^2} &= 0 \\ 2x - \frac{2V}{y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ resolviendo el sistema se tiene que: } x = y = \sqrt[3]{V}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = 2$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \text{ en el punto } x = y = \sqrt[3]{V} \text{ y como } \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} > 0$$

la superficie total seria menor cuando $x = y = z = \sqrt[3]{V}$ donde $A_t = 6V^{\frac{2}{3}}$

- 2035 Que dimensiones deberá tener un baño abierto, de volumen V dado, para que su superficie sea la menor posible?

Desarrollo

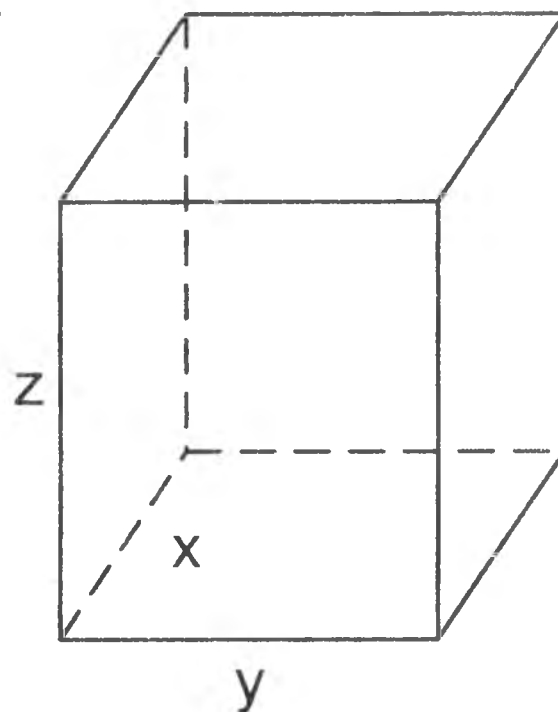
Consideremos las dimensiones del baño x, y, z donde: $V = xyz \Rightarrow z = \frac{V}{xy}$

además su área es: $A = xy + 2xz + 2yz$ donde:

$$A = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \text{ derivando se tiene:}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = 1$$



formando el sistema siguiente se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y} &= x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

resolviendo el sistema se tiene: $x = y = \sqrt[3]{2V}$

$$\text{como } \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} > 0,$$

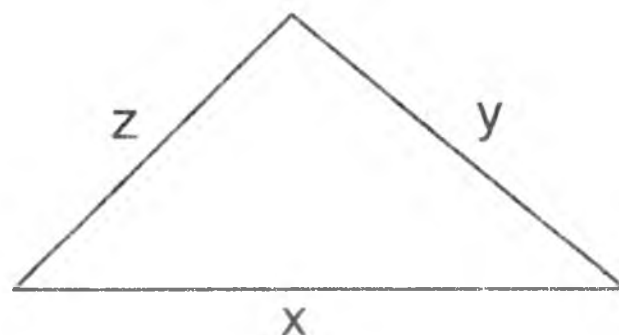
Luego la superficie es mínima para $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2V}$

- 2036** Entre todos los triángulos de perímetro igual a $2p$, hallar el que tiene mayor área.

Desarrollo

condición del problema:

$$x + y + z = 2p \quad \dots (\alpha)$$



además el área de un triángulo conociendo sus lados es:

$$A = \sqrt{P(P-x)(P-y)(P-z)}, \text{ como } z = 2p - x - y, \text{ reemplazando se tiene:}$$

$$A = \sqrt{2p^3(x+y) - p^2(x^2 + y^2 + 3xy) + pxy(x+y) - p^4}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{2p^3 - 2p^2x - 3p^2y + 2pxy + py^2}{2\sqrt{2p^3(x+y) - p^2(x^2 + y^2 + 3xy) + pxy(x+y) - p^4}}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{2p^3 - 2p^2y - 3px + px^2 + 2pxy}{2\sqrt{2p^3(x,y) - p^2(x^2 + y^2 + 3xy) + pxy(x+y) - p^4}}$$

formando el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2p^3 - 2p^2x - 3p^2y + 2pxy + py^2 = 0 \\ 2p^3 - 2p^2y - 3px + px^2 + 2pxy = 0 \end{array} \right. \quad \dots (1)$$

$$\dots (2)$$

simplificando y sumando (1) y (2) se tiene: $(x-y)(x+y-p) = 0$ de donde:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y - p = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ x + y = p \end{array} \right. \quad \text{como } 2p^3 - 2p^2x - 3p^2y + 2pxy + py^2 = 0$$

$$2p^2 - 2px - 3py + 2xy + y^2 = 0 \quad \text{como } x = y \text{ tenemos:}$$

$$2p^2 - 2px - 3px + 2x^2 + x^2 = 0$$

$$3x^2 - 5px + 2p^2 = 0 \quad \text{de donde al resolver se tiene: } x = \frac{2p}{3} = y = z$$

Luego se trata de un triángulo equilátero.

- 2037 Hallar el paralelepípedo rectangular de área s dada, que tenga el mayor volumen posible.

Desarrollo

Se conoce que: $V = xyz$

$$S = 2xy + 2xz + 2yz \Rightarrow z = \frac{S - 2xy}{2(x + y)}$$

$$\text{Luego } V = \frac{Sxy - 2x^2y^2}{2(x + y)} \quad \text{derivando se tiene:}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{Sy^2 - 2x^2y^2 - 4xy^3}{(x + y)^2} \right), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{Sx^2 - 2x^2y^2 - 4x^3y}{(x + y)^2} \right)$$

formando el siguiente sistema se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S - 2x^2 - 4xy = 0 \\ S - 2y^2 - 4xy = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = y$$

$$\text{como } S = 2xy + 2xz + 2yz \Rightarrow S = 2x^2 + 4xz \Rightarrow z = \frac{S - 2x^2}{4x}$$

$$\text{como } s - 2x^2 - 4xy = 0 \Rightarrow s - 2x^2 = 4xy$$

Luego $z = \frac{S - 2x^2}{4x} = \frac{4xy}{4x} = y$; $x = y = z$. Luego se trata de un cubo

- 2038** Representar el número positivo A en forma de producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea la menor posible.

Desarrollo

De acuerdo a las condiciones del problema se tiene: $a = xyzt$, $s = x + y + z + t$

Sea $f(x,y,z,t) = x + y + z + t + \lambda(xyzt)$ de donde se tiene:

$$f'_x = 1 + \lambda yzt, \quad f'_y = 1 + \lambda xzt, \quad f'_z = 1 + \lambda xyt, \quad f'_t = 1 + \lambda xyz$$

formando el sistema se tiene:

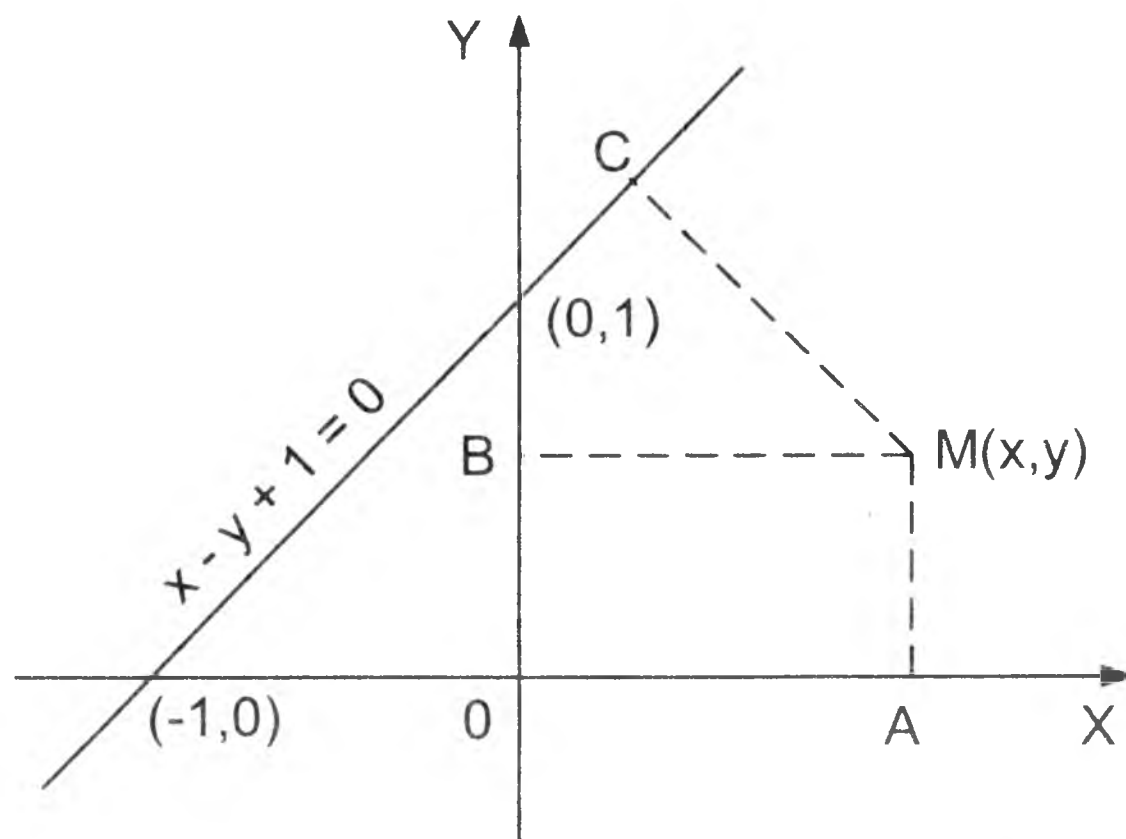
$$\left. \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \\ f'_t = 0 \\ \varphi(x, y, z, t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + yzt = 0 \\ 1 + xzt = 0 \\ 1 + xyt = 0 \\ 1 + xyz = 0 \\ xyzt = a \end{array} \right.$$

resolviendo el sistema se tiene: $x = y = z = t = a^{\frac{1}{4}}$.

$$\text{Luego } a = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$$

- 2039** En el plano XOY hay que hallar un punto M(x,y) tal, que la suma de los cuadrados de sus distancias hasta las tres rectas $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ sea la menor posible.

Desarrollo



condición del problema es: $F = [d(A, M)]^2 + [d(B, M)]^2 + [d(M, C)]^2$

De donde: $d(A, M) = y$, $d(B, M) = x$, $d(M, C) = \frac{x - y + 1}{\sqrt{2}}$

Luego $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{(x - y + 1)^2}{2}$ derivando se tiene:

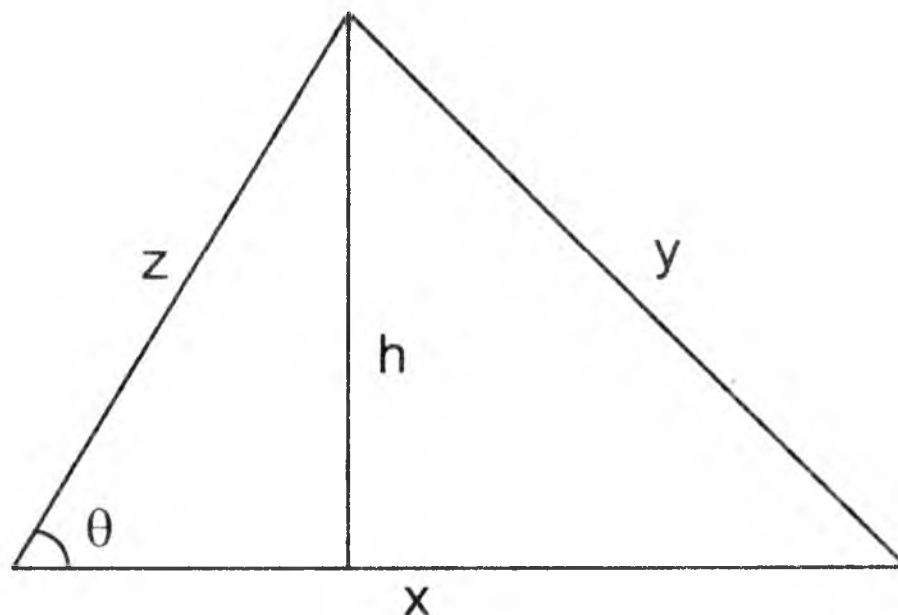
$$f'_x = 2x + (x - y + 1), \quad f'_y = 2y - (x - y + 1)$$

es decir: $f'_x = 3x - y + 1$, $f'_y = 3y - x - 1$, formando el sistema se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + 1 = 0 \\ 3y - x - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = y = \frac{1}{4}$$

Luego el punto $M(x, y) = M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

- 2040 Hallar el triángulo de perímetro $2p$ dado, que al girar alrededor de uno de sus lados engendra el cuerpo de mayor volumen.

Desarrollo

Aplicando la ley de cosenos se tiene:

$$y^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{x^2 + z^2 - y^2}{2xz}$$

además $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ reemplazando se tiene:

$$1 - \sin^2 \theta = \left(\frac{x^2 + z^2 - y^2}{2xz} \right)^2 \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{x^2 + z^2 - y^2}{2xz} \right)^2$$

$$\text{además se tiene } \sin \theta = \frac{h}{z} \Rightarrow h^2 = z^2 \sin^2 \theta$$

por condiciones del problema se tiene:

$$x + y + z = 2p \text{ y } V = \frac{h^2 x}{3} \text{ reemplazando se tiene:}$$

$$V = \frac{\pi h^2 x}{3} = \frac{\pi x}{3} z^2 \sin^2 \theta = \frac{\pi x z^3}{3} \left(1 - \left(\frac{x^2 + z^2 - y^2}{2xz} \right)^2 \right)$$

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{4x^2 z^2 - (x^2 + z^2 - y^2)^2}{4x} \right)$$

por el multiplicador de Lagrange se tiene:

$$f(x, y, z) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{4x^2 z^2 - (x^2 + z^2 - y^2)^2}{4x} + \lambda(x + y + z - 2p) \right)$$

$$f'_x = \frac{\pi}{12} \left(\frac{2x^2 y^2 + 2x^2 z^2 - 2y^2 z^2 - 3x^4 + y^4 + z^4}{x^2} \right) + \lambda$$

$$f'_y = \frac{\pi}{12} \left(\frac{4x^2 y + 4yz^2 - 4y^3}{x} \right) + \lambda$$

$$f'_z = \frac{\pi}{12} \left(\frac{4x^2 z + 4y^2 z - 4z^3}{x} \right) + \lambda$$

formado el sistema siguiente se tiene:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12} \left(\frac{2x^2 y^2 + 2x^2 z^2 - 2y^2 z^2 - 3x^4 + y^4 + z^4}{x^2} \right) + \lambda = 0 & \dots (1) \\ \frac{\pi}{12} \left(\frac{4x^2 y + 4yz^2 - 4y^3}{x} \right) + \lambda = 0 & \dots (2) \\ \frac{\pi}{12} \left(\frac{4x^2 z + 4y^2 z - 4z^3}{x} \right) + \lambda = 0 & \dots (3) \end{cases}$$

$$(x, y, z) = x + y + z = 2p \quad \dots (4)$$

resolviendo el sistema se tiene: de (2) y (3) tenemos:

$$(z - y)(z^2 + 2yz + y^2 - x^2) = 0 \quad \text{luego } y = z, \quad z^2 + 2yz + y^2 - x^2 = 0$$

de (2) y (1) se tiene que:

$$2x^2 y^2 + 2x^2 z^2 - 2y^2 z^2 - 4x^3 - 3x^4 + y^4 + z^4 + 4xz^3 - 4xy^2 z = 0 \quad \dots (5)$$

reemplazando $y = z$ en las ecuaciones (4) y (5):

$$-3x^2 - 4xy + 4y^2 = 0 \quad \dots (6)$$

$$x + 2y = 2p \quad \dots (7)$$

de (7) despejamos $x = 2p - 2y$ reemplazando en (6) se tiene que $y = \frac{3}{4}p$

$$\text{como } x + 2y = 2p \Rightarrow x = \frac{p}{2}$$

luego los lados del triangulo es: $x = \frac{p}{2}$, $y = \frac{3}{4}p$, $z = \frac{3}{4}p$

- 2041** En un plano se dan tres puntos materiales: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ cuyas masas respectivas son m_1 , m_2 y m_3 , que posición deberá ocupar el punto $P(x, y)$ para que al momento cuadrático (momento de inercia) de este sistema de puntos, con relación a dicho punto P (es decir, la suma $m_1 P_1^2 + m_2 P_2^2 + m_3 P_3^2$) sea el menor posible.

Desarrollo

De acuerdo a las condiciones del problema se tiene:

$$I_y = m_1(x - x_1)^2 + m_2(x - x_2)^2 + m_3(x - x_3)^2 \text{ de donde}$$

$$\frac{dI_y}{dx} = 2m_1(x - x_1) + 2m_2(x - x_2) + 2m_3(x - x_3) = 0, \text{ entonces}$$

$$(2m_1 + 2m_2 + 2m_3)x = 2m_1x_1 + 2m_2x_2 + 2m_3x_3 \text{ de donde se tiene:}$$

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$I_x = m_1(y - y_1)^2 + m_2(y - y_2)^2 + m_3(y - y_3)^2$$

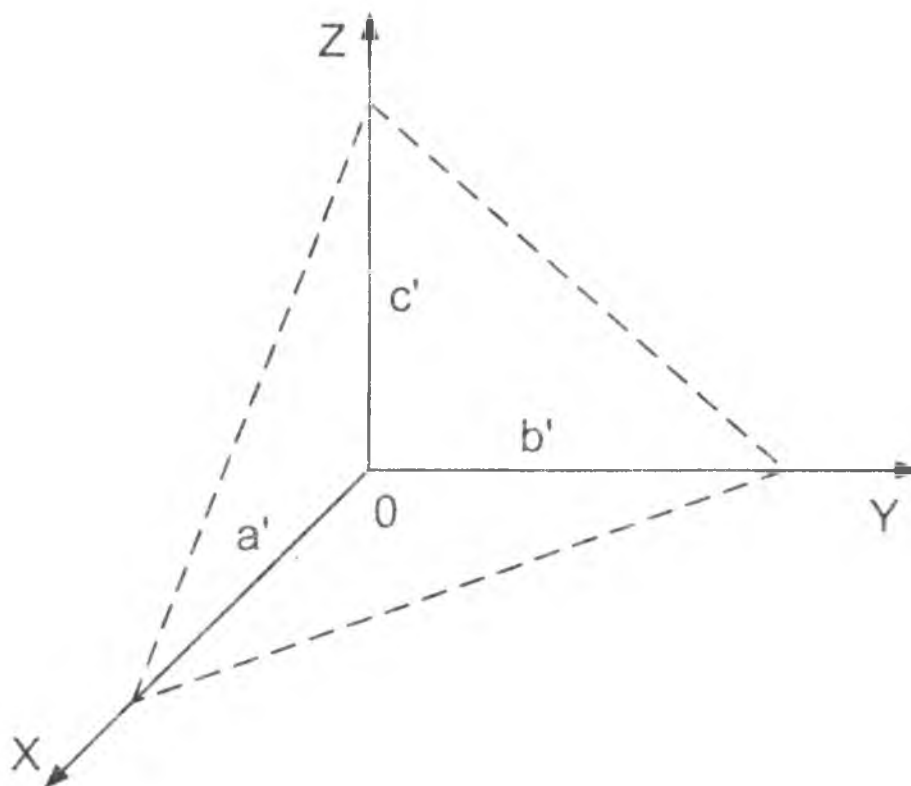
$$\frac{dI_x}{dy} = 2m_1(y - y_1) + 2m_2(y - y_2) + 2m_3(y - y_3) = 0$$

$$(2m_1 + 2m_2 + 2m_3)y = 2m_1y_1 + 2m_2y_2 + 2m_3y_3 \text{ de donde se tiene:}$$

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

- 2042 Hacer pasar un plano por el punto $M(a,b,c)$ que forme con los planos coordenados un tetraedro que tenga el menor volumen posible.

Desarrollo



La ecuación del plano que intercepta a los ejes es: $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1$

además el plano pasa por el punto: $M(a,b,c) \Rightarrow \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 1$

ahora formemos la función de acuerdo a las condiciones del problema:

$$V = \frac{Abh}{k} + \lambda\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c-1}{c'}\right) = \frac{a'b'c'}{2k} + \lambda\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c-1}{c'}\right)$$

donde k es un factor de proporcionalidad.

$$\text{Luego } \frac{\partial V}{\partial a'} = \frac{b'c'}{2k} - \lambda \frac{a}{a'^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial b'} = \frac{a'c'}{2k} - \lambda \frac{b}{b'^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial c'} = \frac{b'a'}{2k} - \lambda \frac{c}{c'^2}$$

$$\text{Formando el sistema se tiene: } \left. \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial a'} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial b'} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{b'c'}{2k} - \frac{\lambda a}{a'^2} = 0 \\ \frac{a'c'}{2k} - \frac{\lambda b}{b'^2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial c'} = 0 \\ \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a'b'}{2k} - \lambda \frac{c}{c'^2} = 0 \\ \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 1 \end{array} \right.$$

resolviendo el sistema se tiene que: $\frac{a}{z'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ y reemplazando en la última

ecuación se tiene: $a' = 3a$, $b' = 3b$, $c' = 3c$

$$\text{como } P = \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1 \Rightarrow P = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$$

- 2043** Inscribir en un elipsoide un paralelepípedo rectangular que tenga el mayor volumen posible.

Desarrollo

$$\text{La ecuación del elipsoide es: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Y el volumen del paralelepípedo es xyz .

$$\text{Luego formamos la función: } V = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \text{ de donde:}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz + \frac{2\lambda x}{a^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz + \frac{2\lambda y}{b^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = xy + \frac{2\lambda z}{c^2}$$

ahora formamos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \end{cases} \quad \dots (1)$$

$$\dots (2)$$

$$\dots (3)$$

$$\varphi(x, y, z) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \dots (4)$$

resolviendo el sistema se tiene: de (1), (2) y (3)

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad \text{reemplazando en la ecuación (4) se tiene:}$$

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \pm \frac{c}{\sqrt{3}} \quad \text{esto es en los semiejes.}$$

Luego las dimensiones del paralelepípedo es: $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}$

- 2044** Calcular las dimensiones exteriores que deberá tener un cajón rectangular abierto, del que se dan el espesor de las paredes δ y la capacidad (interior) V , para que al hacerlo se gaste la menor cantidad posible de material.

Desarrollo

Si las dimensiones del cajón rectangular son x, y, z su volumen interior es:

$V = (x - 2\delta)(y - 2\delta)(z - 2\delta)$ y la superficie es: $A = 2xy + 2xz + 2yz$

Luego formemos la función siguiente:

$$V = 2xy + 2xz + 2yz + \lambda(x - 2\delta)(y - 2\delta)(z - 2\delta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2y + 2z + \lambda(y - 2\delta)(z - 2\delta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2x + 2z + \lambda(x - 2\delta)(z - 2\delta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2x + 2y + \lambda(x - 2\delta)(y - 2\delta)$$

ahora formamos el sistema siguiente:

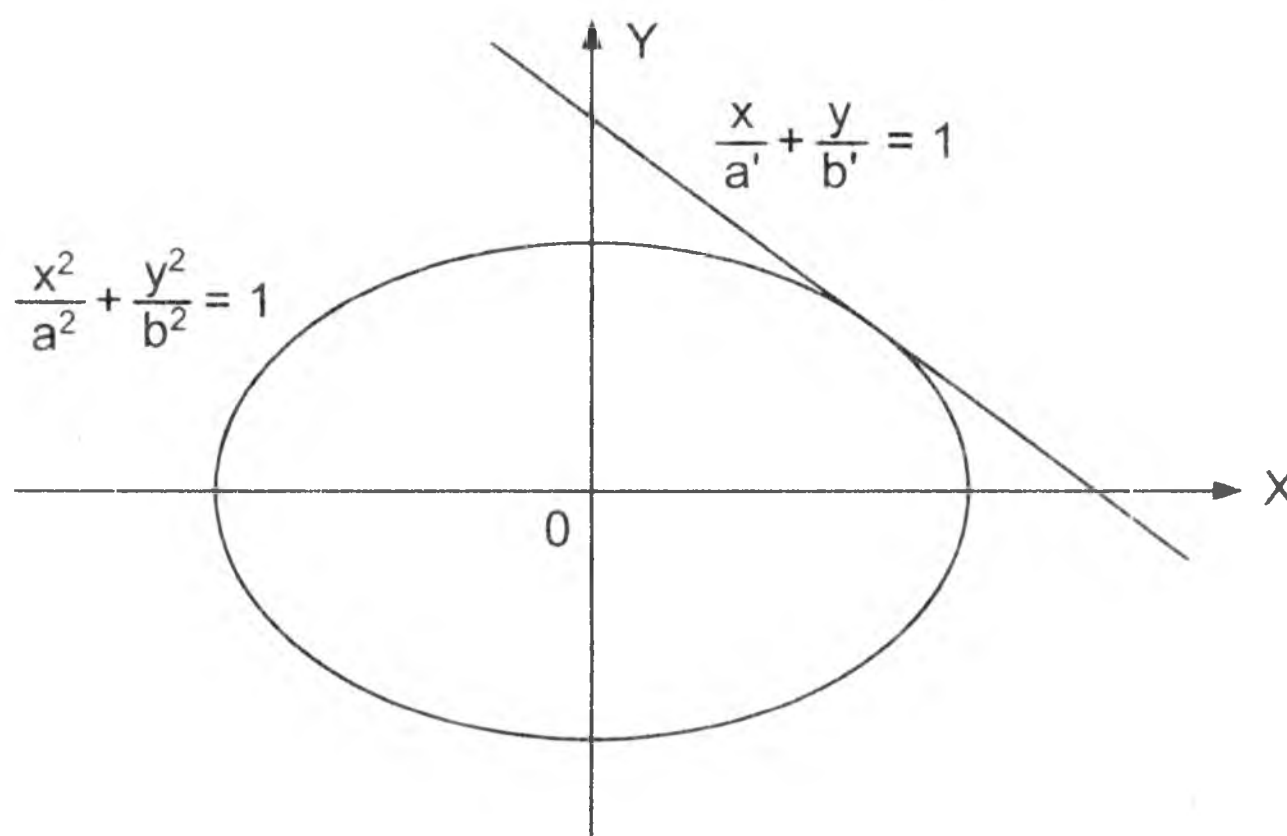
$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z + \lambda(y - 2\delta)(z - 2\delta) = 0 & \dots (1) \\ 2y + 2x + \lambda(x - 2\delta)(z - 2\delta) = 0 & \dots (2) \\ 2x + 2y + \lambda(x - 2\delta)(y - 2\delta) = 0 & \dots (3) \\ (x - 2\delta)(y - 2\delta)(z - 2\delta) = V & \dots (4) \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene: de (1), (2) y (3) se tiene $x = y = 2z$

de donde en (4) se tiene:

$$V = \frac{(x - 2\delta)^3}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V} + 2\delta, \quad y = \sqrt[3]{2V} + 2\delta, \quad z = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2} + \delta$$

- 2045** En que punto de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ la tangente a esta forma con los ejes coordenados el triangulo de menor área.

Desarrollo

La recta tangente a la elipse que intercepta a los ejes es: $L: \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$

Formamos la función siguiente:

$$A = \frac{a'b'}{2} + \lambda \left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 \right) \text{ donde } \frac{a'b'}{2} \text{ es el área}$$

$$\text{Luego se tiene: } \frac{\partial A}{\partial a'} = \frac{b'}{2} - \frac{\lambda x}{a'^2}, \quad \frac{\partial A}{\partial b'} = \frac{a'}{2} - \frac{\lambda y}{b'^2}$$

Ahora formamos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial a'} = 0 ; \quad \frac{b'}{2} - \frac{\lambda x}{a'^2} = 0 & \dots (1) \\ \frac{\partial A}{\partial b'} = 0 ; \quad \frac{a'}{2} - \frac{\lambda y}{b'^2} = 0 & \dots (2) \\ \varphi(a', b') = 0 ; \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1 & \dots (3) \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene: de (1) y (2) se tiene que: $\frac{b'}{a'} = \frac{y}{x}$

por otro lado la pendiente de L es $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b'}{a'}$ y la pendiente de la tangente a

la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.

$$\text{Luego se tiene: } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{b'}{a'} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \Rightarrow \frac{b'}{a'} = \frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

$$\text{Reemplazando en la elipse se tiene: } \frac{2x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}$$

2046 Hallar los ejes de la elipse $sx^2 + 8xy + 5y^2 = 9$

Desarrollo

La ecuación general de 2do grado es: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Ex + Dy + F = 0$

Para eliminar el término xy , consideremos α el ángulo que se va a girar,

$$\text{Donde } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{C}{A-B} = \frac{8}{5-5} \text{ entonces } 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$x = x' \cos 45^\circ - y' \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \operatorname{sen} 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

ahora reemplazamos en la ecuación $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$

$$5\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 9$$

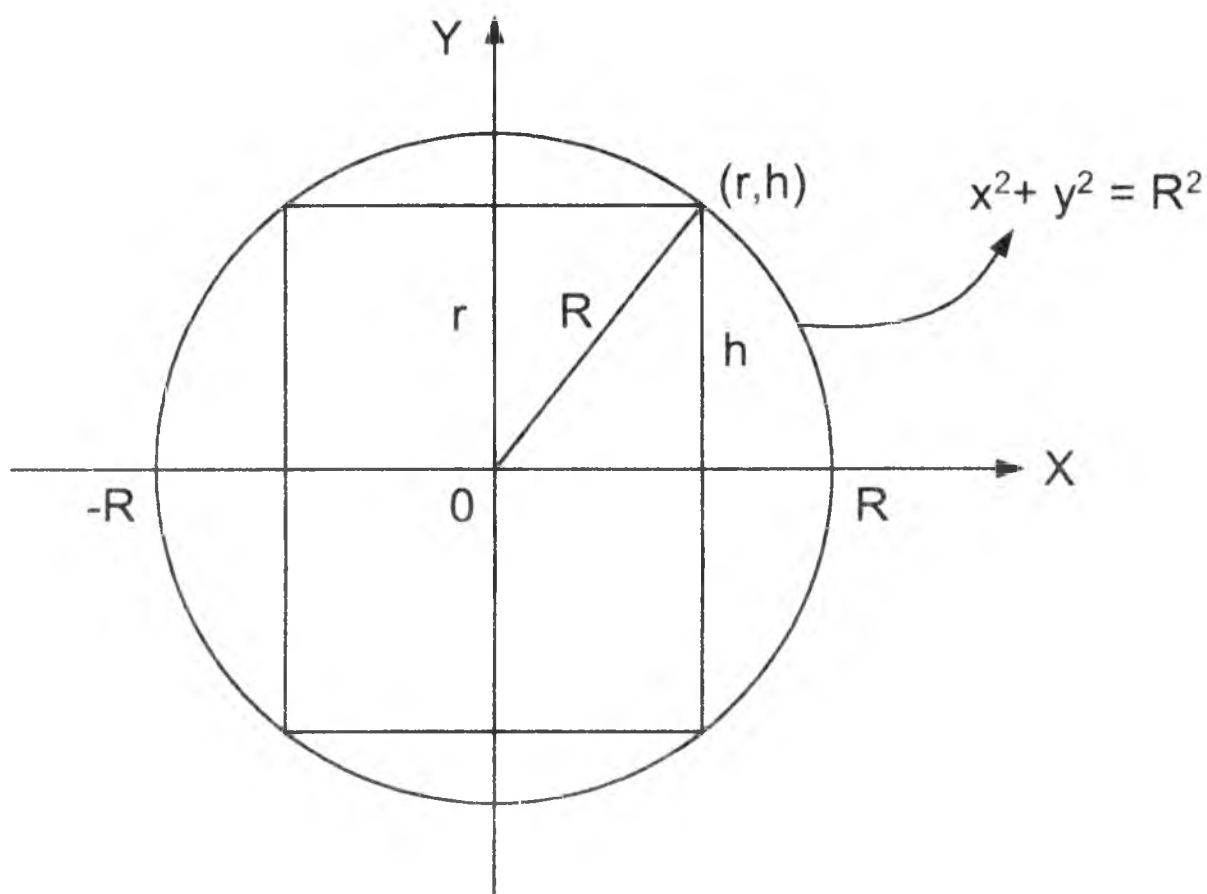
simplificando se tiene: $9x'^2 + y'^2 = 9$ lo que es lo mismo

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 9 \wedge b^2 = 1$$

Luego el eje mayor es $2a = 6$ y el eje menor $2b = 2$

2047 Es una esfera dada, inscribir el cilindro cuya superficie total sea máxima.

Desarrollo



Altura del cilindro $= H = 2h$; Radio de la esfera $= R$; Radio del cilindro $= r$

área total del cilindro $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

De acuerdo a las condiciones del problema formamos la función siguiente:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 + \lambda(r^2 + h^2 - R^2) \text{ donde } (h,r) \text{ pertenece a}$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ entonces: } h^2 + r^2 = R^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial r} = 2\pi h + 4\pi r + 2\lambda r, \frac{\partial A}{\partial h} = 2\pi r + 2\lambda h, \text{ ahora formamos el sistema siguiente:}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial h} = 0 \\ \varphi(r, h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2h + 2\pi r + 2\lambda r = 0 \\ 2\pi r + 2\lambda h = 0 \\ r^2 + h^2 = R^2 \end{cases} \begin{matrix} \dots (1) \\ \dots (2) \\ \dots (3) \end{matrix}$$

resolviendo el sistema se tiene que: de (1), (2) y (3) se tiene que:

$$8r^4 - 8r^2 R^2 + R^4 = 0 \quad \text{de donde} \quad r = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad r = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\text{para } r = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\text{además } \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = 4\pi + 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial h^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial h} = 2\pi$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial h^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r \partial h}\right)^2 < 0 \quad \text{tiene máximo en } r = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad h = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\text{como } H = 2h = R\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad r = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

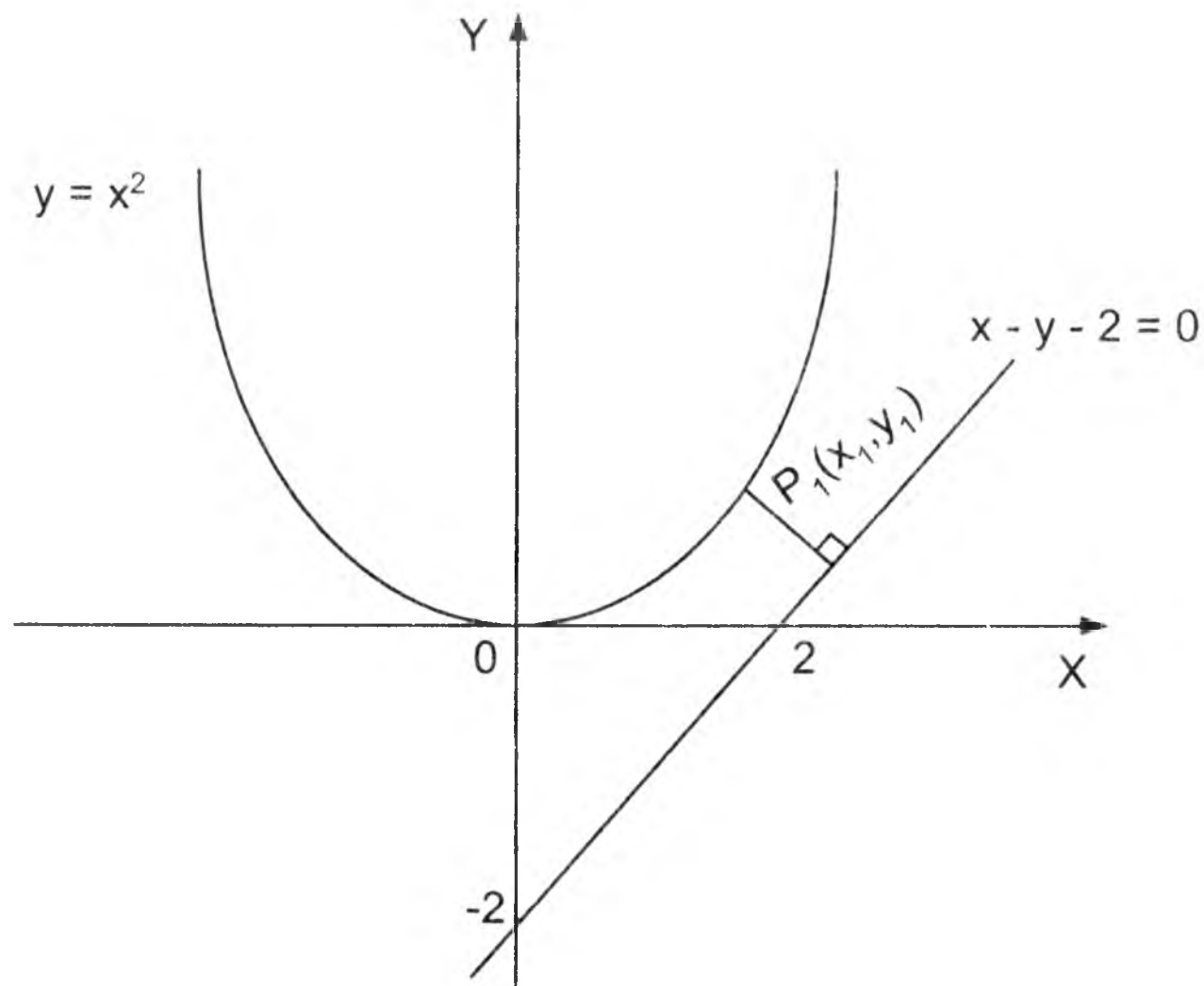
luego el radio de la base del cilindro es:

$$r = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{y la altura es } R\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{donde } R \text{ es el radio de la esfera.}$$

- 2048** Los cursos de dos ríos (dentro de los límites de una región determinada) representan aproximadamente una parábola $y = x^2$ y una recta, $x - y - 2 = 0$. Hay que unir estos ríos por medio de un canal rectilíneo que tenga la menor longitud posible. Porque puntos habrá que trazarlo?

Desarrollo

Graficando la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$



Sea $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $\Rightarrow y_1 = x_1^2$ y la distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$

a la recta $x - y - 2 = 0$ es $D = \frac{x_1 - y_1 - 2}{-\sqrt{2}}$ pero $y_1 = x_1^2$

Entonces reemplazando se tiene: $D = \frac{x_1 - x_1^2 - 2}{-\sqrt{2}}$

Derivando se tiene: $\frac{dD}{dx_1} = \frac{1 - 2x_1}{-\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

como $y_1 = x_1^2 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{4}$ luego la distancia es $D = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2}{-2} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$

la pendiente de la recta $x - y - 2 = 0$ es $m_1 = 1$ y la pendiente de la perpendicular a esta recta es $m_2 = -1$.

La ecuación que pasa por $P_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ y $m_2 = -1$ es $y - \frac{1}{4} = -1(x - \frac{1}{2})$ es decir
 $4x + 4y - 3 = 0$ ahora resolviendo el sistema siguiente: $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 4x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$ se
 tiene $x = \frac{11}{8}$, $y = -\frac{5}{8}$ de donde el punto $P_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ de la parábola: $y = x^2$
 debe unirse con el punto $P_2(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8})$ de la recta $x - y - 2 = 0$ con una
 longitud $\frac{7\sqrt{2}}{8}$

- 2049 Hallar la distancia más corta del punto $M(1,2,3)$ a la recta $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$

Desarrollo

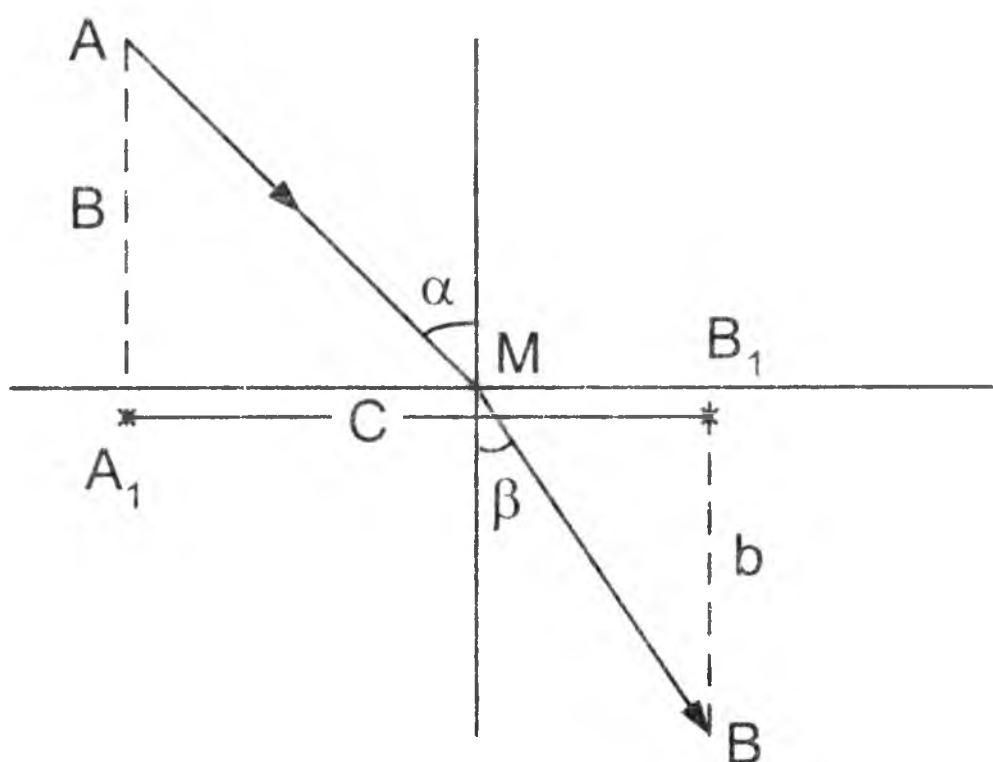
La ecuación de un plano que pasa por el punto $M(1,2,3)$ y que sea perpendicular a la recta: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$ es: $1(x - 1) - 3(y - 2) + 2(z - 3) = 0$
 es decir $x - 3y + 2z - 1 = 0$ ahora hacemos la intersección del plano con la

recta es decir: $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2} \end{cases}$ de donde $x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{3}{4}$, $z = \frac{1}{7}$

ahora hallaremos la distancia d entre los puntos: $M(1,2,3)$ y $P(\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{7})$ es

decir: $d = \sqrt{(1 - \frac{1}{14})^2 + (2 + \frac{3}{14})^2 + (3 - \frac{1}{7})^2} = \frac{\sqrt{2730}}{14}$

- 2050 Los puntos A y B están situados en diferentes medios ópticos, separados el uno al otro por una línea recta (fig 72) la velocidad de propagación de la luz en el primer medio es igual a V_1 , en el segundo a V_2 . Aplicando el “principio de Fermat”, según el cual el rayo luminoso se propaga a lo largo de la línea AMB, para cuyo recorrido necesita el mínimo de tiempo, deducir la ley de la refracción del rayo de la luz.



Desarrollo

Sea $u = \frac{a}{V_1 \cos \alpha} + \frac{b}{V_2 \cos \beta} + \lambda(a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta - c)$

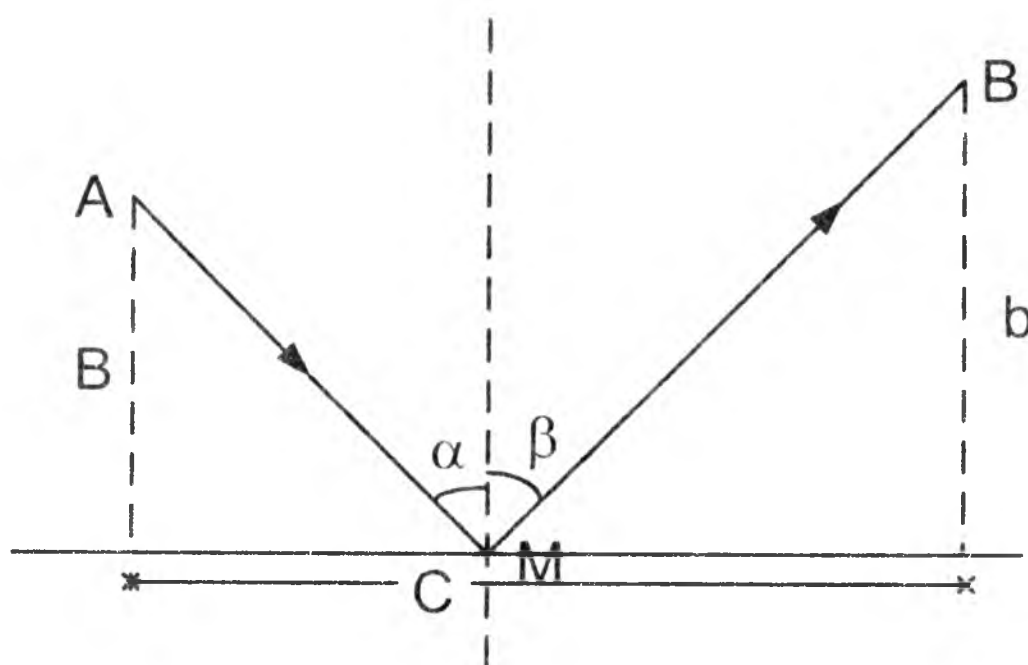
$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{a}{V_1} \operatorname{tg} \alpha \sec \alpha + \lambda a \sec^2 \alpha \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{b}{V_2} \operatorname{tg} \beta \sec \beta + \lambda b \sec^2 \beta$$

formando el sistema siguiente se tiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0 \\ a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{V_1} \operatorname{tg} \alpha \sec \alpha + \lambda a \sec^2 \alpha = 0 \\ \frac{b}{V_2} \operatorname{tg} \beta \sec \beta + \lambda b \sec^2 \beta = 0 \\ a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta = c \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene: $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{V_1}{V_2}$

- 2051 Aplicando el “Principio de Fermat” deducir la ley de la reflexión del rayo de luz de un plano en un medio homogéneo. (fig 73)



Desarrollo

Por tratarse de un plano en un medio homogéneo se tiene $V_1 = V_2$

Luego sea $u = \frac{a}{V_1 \cos \alpha} + \frac{b}{V_1 \cos \beta} + \lambda(a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta - c)$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{a}{V_1} \operatorname{tg} \alpha \sec \alpha + \lambda a \sec^2 \alpha \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{b}{V_1} \operatorname{tg} \beta \sec \beta + \lambda b \sec^2 \beta$$

formando el sistema se tiene que: $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \frac{a}{V_1} \operatorname{tg} \alpha \sec \alpha + \lambda a \sec^2 \alpha = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \frac{b}{V_1} \operatorname{tg} \beta \sec \beta + \lambda b \sec^2 \beta = 0$$

$$a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta - c = 0 \Rightarrow a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta = c$$

resolviendo el sistema se tiene: $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$ de donde $\alpha = \beta$

- 2052** Si por un circuito eléctrico de resistencia R pasa por una corriente I , la cantidad de calor que se desprende en una unidad de tiempo es proporcional a $I^2 R$.
 ¿Determinar, como habrá que distribuir la corriente I en I_1 , I_2 e I_3 valiéndose de tres conductores de resistencia R_1 , R_2 y R_3 , respectivamente para conseguir que el desprendimiento de calor sea mínimo?

Desarrollo

De acuerdo a las condiciones del problema se tiene:

$$f(I_1, I_2, I_3) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 \quad \text{y} \quad I = I_1 + I_2 + I_3$$

ahora definiremos la función: $F(I_1, I_2, I_3) = f(I_1, I_2, I_3) + \lambda I$ de donde:

$$F(I_1, I_2, I_3) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + \lambda(I_1 + I_2 + I_3)$$

ahora hallaremos sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial I_1} = 2I_1 R_1 + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial I_2} = 2I_2 R_2 + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial I_3} = 2I_3 R_3 + \lambda$$

formaremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial I_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial I_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial I_3} = 0 \\ I = I_1 + I_2 + I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2I_1 R_1 + \lambda = 0 \\ 2I_2 R_2 + \lambda = 0 \\ 2I_3 R_3 + \lambda = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = I \end{cases} \quad \text{resolviendo el sistema se tiene:}$$

$I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3$ esto reemplazando en la ecuación $I_1 + I_2 + I_3 = I$ se tiene:

$$I_1 = \frac{IR_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, \quad I_2 = \frac{IR_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, \quad I_3 = \frac{IR_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

6.15. PUNTOS SINGULARES DE LAS CURVAS PLANAS.-

1ra. DEFINICIÓN DE UN PUNTO SINGULAR.-

Un punto $M(x_0, y_0)$ de una curva plana $f(x, y) = 0$, se llama punto singular, si sus coordenadas satisfacen simultáneamente a las tres ecuaciones.

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

2do. TIPOS PRINCIPALES DE PUNTOS SINGULARES.-

Supongamos que en el punto singular $M(x_0, y_0)$ las derivadas de 2do orden.

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0)$$

$$B = f''_{xy}(x_0, y_0)$$

$$C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

no son todos iguales a cero y que:

$$\Delta = AC - B^2$$

en este caso tendremos:

- a) Si $\Delta > 0$, M será un punto aislado (fig 74)
- b) Si $\Delta < 0$, M será un punto crunadal (punto doble) (fig 75)
- c) Si $\Delta = 0$, M puede ser un punto de retroceso de 1ra especie (fig 76) o de 2da especie (fig 77) o un punto aislado, o punto doble cotangentes coincidentes o tecnodo (fig 78).

Al resolver los problemas de este apartado, se considera obligatoriamente la construcción de las curvas.



FIG. 74

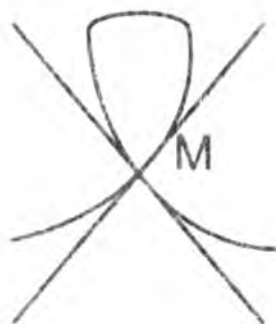


FIG. 75

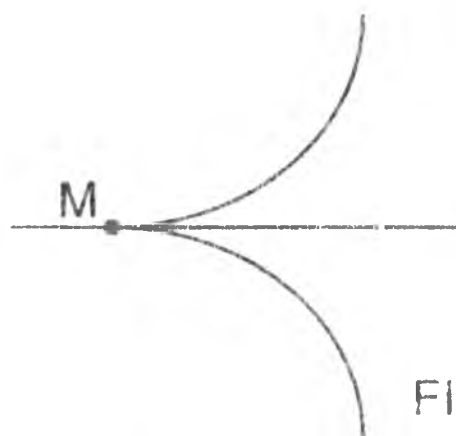


FIG. 76



FIG. 77

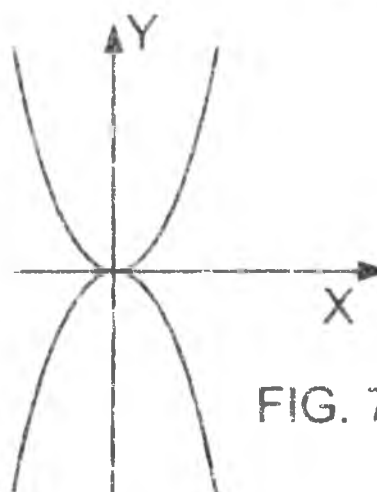


FIG. 78

Determinar el carácter de los puntos singulares de las curvas siguientes:

1053 $y^2 = -x^2 + x^4$

Desarrollo

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^4$ de donde $f'_x(x, y) = 2x - 4x^3$, $f'_y(x, y) = 2y$

Ahora formamos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - x^4 = 0 \\ f'_x(x, y) = 2x - 4x^3 = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene: $x = y = 0 \Rightarrow p(0,0)$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = 2 - 12x^2 \\ f''_{yy}(x, y) = 2 \\ f''_{xy}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(0,0) = 2 \\ f''_{yy}(0,0) = 2 \\ f''_{xy}(0,0) = 0 \end{cases}$$

$\Delta = f''_{xx}(0,0) \cdot f''_{yy}(0,0) - (f''_{xy}(0,0))^2 = 4 > 0$, luego el punto $p(0,0)$ es punto aislado.

2054 $(y - x^2)^2 = x^5$

Desarrollo

Sea $f(x, y) = (y - x^2)^2 - x^5$ de donde se tiene:

$$f'_x(x, y) = -4x(y - x^2) - 5x^4, \quad f'_y(x, y) = 2(y - x^2)$$

ahora formamos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} f(x, y) = (y - x^2)^2 - x^5 = 0 \\ f'_x(x, y) = -4x(y - x^2) - 5x^4 = 0 \\ f'_y(x, y) = 2(y - x^2) = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene $x = y = 0$ es decir $p(0,0)$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = -4y + 12x^2 - 20x^3 \\ f''_{yy}(x, y) = 2 \\ f''_{xy}(x, y) = -4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(0, 0) = 0 \\ f''_{yy}(0, 0) = 2 \\ f''_{xy}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$\Delta = f''_{xx}(0, 0) \cdot f''_{yy}(0, 0) - (f''_{xy}(0, 0))^2 = 0$, luego el punto $p(0,0)$ es un punto de retroceso de 2da especie.

2055 $a^4 y^2 = a^2 x^4 - x^6$

Desarrollo

Sea $f(x, y) = a^4 y^2 - a^2 x^4 + x^6$ de donde se tiene:

$$f'_x(x, y) = -4a^2 x^3 + 6x^5, \quad f'_y(x, y) = 2a^4 y$$

ahora formamos el sistema se tiene:

$$\begin{cases} f(x, y) = a^4 y^2 - a^2 x^4 + x^6 = 0 \\ f'_x(x, y) = -4a^2 x^3 + 6x^5 = 0 \\ f'_y(x, y) = 2a^4 y = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene $x = y = 0$ es decir $p(0,0)$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = -12a^2x^2 + 30x^4 \\ f''_{yy}(x, y) = 2a^4 \\ f''_{xy}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(0, 0) = 0 \\ f''_{yy}(0, 0) = 2a^4 \\ f''_{xy}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$\Delta = f''_{xx}(0, 0) \cdot f''_{yy}(0, 0) - (f''_{xy}(0, 0))^2 = 0$, luego el punto $p(0,0)$ es un punto tacnodo.

2056 $x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$

Desarrollo

Sea $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$ de donde se tiene:

$$f'_x(x, y) = 2xy^2 - 2x, \quad f'_y(x, y) = 2x^2y - 2y$$

Ahora formamos el siguiente sistema
$$\begin{cases} f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 \\ f'_x(x, y) = 2xy^2 - 2x = 0 \\ f'_y(x, y) = 2x^2y - 2y = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene $x = y = 0$ es decir $p(0,0)$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = 2y^2 - 2 \\ f''_{yy}(x, y) = 2x^2 - 2 \\ f''_{xy}(x, y) = 4xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(0, 0) = -2 \\ f''_{yy}(0, 0) = -2 \\ f''_{xy}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$\Delta = f''_{xx}(0, 0) \cdot f''_{yy}(0, 0) - (f''_{xy}(0, 0))^2 = 4 > 0$, entonces el punto $p(0,0)$ es un punto aislado.

2057 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Folium de Descartes)

Desarrollo

Sea $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ de donde se tiene:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay, \quad f'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax$$

ahora formando el sistema se tiene:

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0 \\ f'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay = 0 \\ f'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene $x = y = 0$, es decir: $p(0,0)$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = 6x \\ f''_{yy}(x, y) = 6y \\ f''_{xy}(x, y) = -3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(0,0) = 0 \\ f''_{yy}(0,0) = 0 \\ f''_{xy}(0,0) = -3a \end{cases}$$

$\Delta = f''_{xx}(0,0) \cdot f''_{yy}(0,0) - (f''_{xy}(0,0))^2 = -3a < 0$, entonces el punto $p(0,0)$ es punto crunadal.

2058 $y^2(a - x) = x^3$ (cisoide)

Desarrollo

Sea $f(x, y) = y^2(a - x) - x^3$, de donde se tiene:

$$f'_x(x, y) = -y^2 - 3x^2, \quad f'_y(x, y) = 2y(a - x)$$

ahora formamos el sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = y^2(a - x) - x^3 = 0 \\ f'_x(x, y) = -y^2 - 3x^2 = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y(a - x) = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene: $x = y = 0$, es decir: $p(0,0)$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = -6x \\ f''_{yy}(x, y) = 2(a - x) \\ f''_{xy}(x, y) = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(0, 0) = 0 \\ f''_{yy}(0, 0) = 2a \\ f''_{xy}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$\Delta = f''_{xx}(0, 0) \cdot f''_{yy}(0, 0) - (f''_{xy}(0, 0))^2 = 0$, luego el punto $p(0, 0)$ es un punto de retroceso.

1059 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (Lemniscata)

Desarrollo

Sea $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)$, de donde

$$f'_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2) - 2a^2x, \quad f'_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2) + 2a^2y$$

ahora formamos el sistema
$$\begin{cases} f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0 \\ f'_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2) - 2a^2x = 0 \\ f'_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2) + 2a^2y = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene: $x = y = 0$ es decir $p(0, 0)$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2 \\ f''_{yy}(x, y) = 4x^2 + 12y^2 + 2a^2 \\ f''_{xy}(x, y) = 8xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(0, 0) = -2a^2 \\ f''_{yy}(0, 0) = 2a^2 \\ f''_{xy}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$\Delta = f''_{xx}(0, 0) \cdot f''_{yy}(0, 0) - (f''_{xy}(0, 0))^2 = -4a^4 < 0$ entonces el punto $p(0, 0)$ es un punto crunadal.

1060 $(a + x)y^2 = (a - x)x^3$ (Estrofoide)

Desarrollo

Sea $f(x, y) = (a + x)y^2 - (a - x)x^3$ de donde se tiene:

$$f'_x(x, y) = y^2 - 3ax^2 + 4x^3, \quad f'_y(x, y) = 2y(a + x)$$

ahora formando el sistema se tiene:

$$\begin{cases} f(x, y) = (a + x)y^2 - (a - x)x^3 = 0 \\ f'_x(x, y) = y^2 - 3ax^2 + 4x^3 = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y(a + x) = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene $x = y = 0$ es decir $p(0,0)$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = -6ax + 12x^2 \\ f''_{yy}(x, y) = 2(a + x) \\ f''_{xy}(x, y) = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(0, 0) = 0 \\ f''_{xy}(0, 0) = 2a \\ f''_{yy}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$\Delta = f''_{xx}(0, 0) \cdot f''_{yy}(0, 0) - (f''_{xy}(0, 0))^2 = 0$ entonces el punto $p(0,0)$ es un punto crunadal

2061 $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2 x^2$ ($a < 0, b < 0$) (concoide) examinar tres casos:

1) $a > b$

2) $a = b$

3) $a < b$

Desarrollo

Sea $f(x, y) = (x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2 x^2$ de donde:

$$f'_x(x, y) = 2x(x - a)^2 + 2(x^2 + y^2)(x - a) - 2b^2 x, \quad f'_y(x, y) = 2y(x - a)^2$$

ahora formando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x, y) = (x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2 x^2 = 0 \\ f'_x(x, y) = 2x(x - a)^2 + 2(x^2 + y^2)(x - a) - 2b^2 x = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y(x - a)^2 = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene $x = y = 0$

$$f''_{xx}(x, y) = 2(x - a)^2 + 4x(x - a) + 4x(x - a) + 2(x^2 + y^2) - 2b^2$$

$$f''_{xx}(x, y) = 2(x - a)^2 + 8x(x - a) + 2(x^2 + y^2) - 2b^2 \Rightarrow f''_{xx}(0, 0) = 2a^2 - 2b^2$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2(x - a)^2 \Rightarrow f''_{yy}(0, 0) = 2a^2$$

$$f''_{xy}(x, y) = 4y(x - a) \Rightarrow f''_{xy}(0, 0) = 0$$

$$\Delta = f''_{xx}(0, 0) \cdot f''_{yy}(0, 0) - (f''_{xy}(0, 0))^2 = (2a^2 - 2b^2)2a^2 - 0$$

$$\Delta = 4a^2(a^2 - b^2)$$

- 1) Si $a > b$ se tiene $\Delta > 0$ entonces $p(0, 0)$ es un punto aislado.
- 2) para $a = b$ se tiene $\Delta = 0$ entonces $p(0, 0)$ es un punto de retroceso de 1ra especie.
- 3) Para $a < b$ se tiene $\Delta < 0$ entonces $p(0, 0)$ es un punto crumadol.

2062 Determinar como varía el carácter del punto singular de la curva $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$ en dependencia de los valores de a , b y c ($a \leq b \leq c$ son reales).

Desarrollo

Sea $f(x, y) = y^2 - (x - a)(x - b)(x - c)$ de donde

$$f'_x(x, y) = -3x^2 + 2(a + b + c)x + a + b - ab, \quad f'_y(x, y) = 2y$$

ahora formando el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases} f(x, y) = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c) = 0 \\ f'_x(x, y) = -3x^2 + 2(a+b+c)x + a+b-ab = 0 \\ f'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene: $x = a$, $x = b$, $x = c$, $y = 0$

$$\begin{cases} f''_{xx}(x, y) = -6x + 2(a+b+c) \\ f''_{yy}(x, y) = 2 \\ f''_{xy}(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2$$

si a , b y c no son iguales entre sí, entonces no hay punto singular

Si $a = b < c$, el punto $p(a, 0)$ es un punto aislado

Si $a < b = c$, el punto $p(b, 0)$ es un punto crunodal

Si $a = b = c$, el punto $p(c, 0)$ es un punto de retroceso de 1ra especie.

6.16. ENVOLVENTE.-

1ra. DEFINICIÓN DE LA ENVOLVENTE.-

Envolvente de una familia de curvas se llama a la curva (o el conjunto de curvas) tangentes a todas las líneas de dicha familia, además cada uno de sus puntos tiene contacto con alguna de las líneas de la familia que se examinara.

2do. ECUACIÓN DE LA ENVOLVENTE.-

Si una familia de curvas dependientes de un parámetro variable α .

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

tiene envolvente, las ecuaciones paramétricas de esta se determinan por medio del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases} \quad \dots (1)$$

Eliminando el parámetro α del sistema (1), obtendremos una ecuación de la forma:

$$D(x, y) = 0 \quad \dots (2)$$

Debe advertirse, que la curva (2), obtenida formalmente llamada curva discriminante, además de la envolvente, si esta existe, puede contener lugares geométricos de puntos singulares de la familia dada, que no forme parte de la envolvente de la misma al resolver los problemas de este párrafo se recomienda hacer el gráfico.

2063 Hallar la envolvente de la familia de circunferencias $(x - a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$

Desarrollo

Sea $f(x, y, a) = (x - a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} \quad \dots (1)$

De donde $f'_a(x, y, a) = -2(x - a) - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

Reemplazando en (1) se tiene $y = \pm x$

2064 Hallar la envolvente de la familia de rectas $y = kx + \frac{p}{2k}$ (k es un parámetro, p = constante)

Desarrollo

$$\text{Sea } \begin{cases} f(x, y, k) = y - kx - \frac{p}{2k} = 0 & \dots (1) \\ f'_k(x, y, k) = -x + \frac{p}{2k^2} = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

De (2) se tiene $k = \pm \sqrt{\frac{p}{2x}}$ reemplazando en (1)

$$y = \pm (2px)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y^2 = 2px$$

- 2065** Hallar la envolvente de la familia de circunferencias de radios iguales a R, cuyos centros se encuentra en el eje OX.

Desarrollo

La ecuación de la circunferencia de centro en el eje OX es:

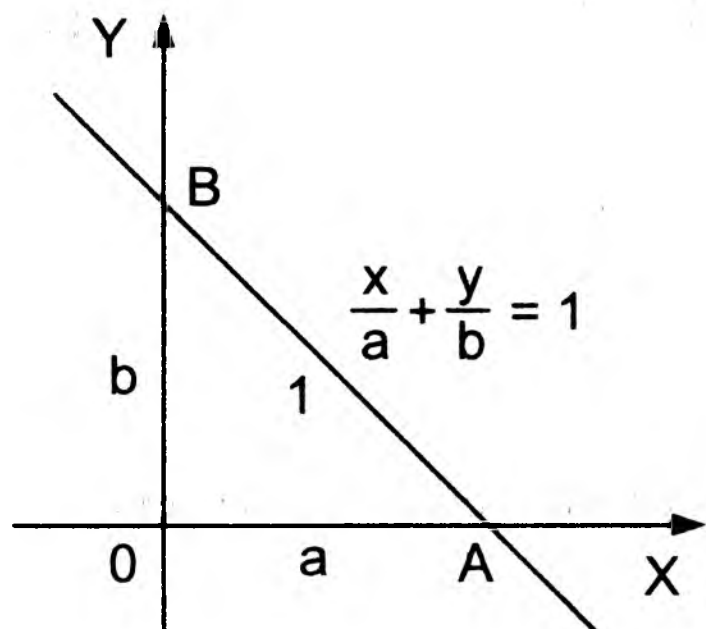
$$(x - h)^2 + y^2 = R^2 \quad \text{de donde:}$$

$$\text{Sea } \begin{cases} f(x, y, h) = (x - h)^2 + y^2 - R^2 = 0 & \dots (1) \\ f'_h(x, y, h) = -2(x - h) = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

De la ecuación (2) se tiene $x = h$ y que al reemplazar en la ecuación (1) se tiene $y = \pm R$.

- 2066** Hallar la curva que envuelve a un segmento de longitud 1, cuando sus extremos resbalan por los ejes de coordenadas.

Desarrollo



Como $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ de donde $b = \frac{ay}{a-x}$,

además en el ΔAOB por Pitágoras se

tiene: $a^2 + b^2 = 1$

$$a^2 + \frac{a^2 y^2}{(a-x)^2} = 1 \text{ de donde}$$

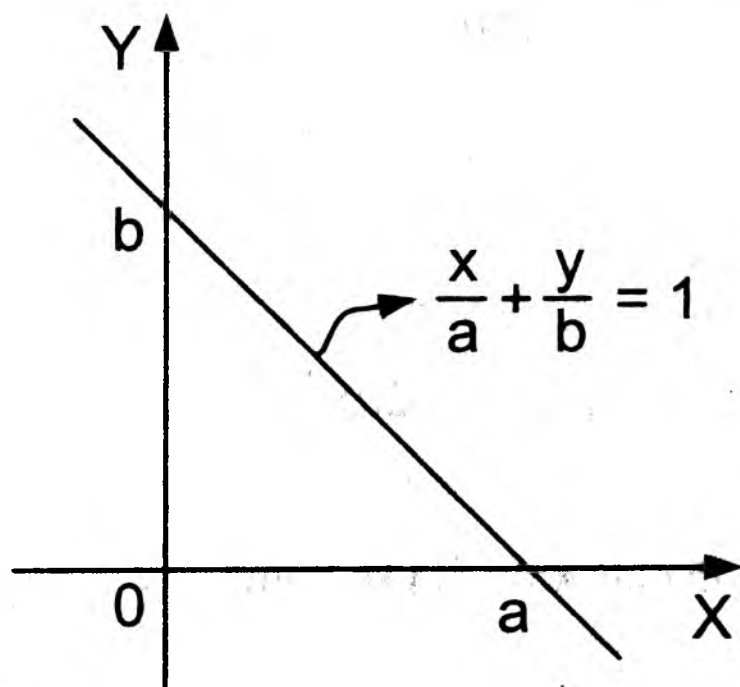
$$\begin{cases} f(x, y, a) = a^2 + \frac{a^2 y^2}{(a-x)^2} - 1 = 0 \\ f'_a(x, y, a) = 2a + \frac{2ay^2(a-x-1)}{(a-x)^3} = 0 \end{cases}$$

de donde $a = x + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{3}{2}}$ además $b = y + x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$

como $a^2 + b^2 = 1^2 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

2067 Hallar la envolvente de la familia de rectas que forman con los ejes coordenados triángulos de área constante s .

Desarrollo



La ecuación de la recta es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

como datos del problema se tiene:

$$s = \frac{a \cdot b}{2} \text{ (área del triángulo) de donde}$$

$$b = \frac{2S}{a}, \text{ reemplazando en la ecuación}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{se tiene:} \quad \frac{x}{a} + \frac{ay}{2S} = 1 \quad \dots (1)$$

que es lo mismo $2Sx + a^2y - 2aS = 0$

sea $f(x, y, z) = a^2y + 2Sx - 2aS$ de donde

$f'_a(x, y, a) = 2ay - 2S$, ahora formando el sistema de ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases} f(x, y, a) = a^2y + 2Sx - 2aS = 0 \\ f'_a(x, y, a) = 2ay - 2S = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{S}{y}$$

que al reemplazar en (1) se tiene: $\frac{xy}{S} + \frac{ay}{2S} = 1$ de donde $xy = \frac{S}{2}$

2068 Hallar la envolvente de las elipses de áreas constante s , cuyos ejes de simetría coinciden.

Desarrollo

La ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots (\alpha)$

además el área de la elipse es: $S = \pi ab \Rightarrow b^2 = \frac{S^2}{\pi^2 a^2}$

reemplazando en la ecuación (α) se tiene: $x^2 S^2 + y^2 \pi a^4 = a^2 S^2 \quad \dots (1)$

ahora consideramos la función $\begin{cases} f(x, y, a) = x^2 S^2 + y^2 \pi a^4 - a^2 S^2 = 0 \\ f'_a(x, y, a) = 4a^3 \pi y^2 - 2a S^2 = 0 \end{cases}$

de donde $a^2 = \frac{S^2}{2\pi^2 y^2}$ reemplazando en la ecuación (1) se tiene: $xy = \pm \frac{S}{2\pi}$

2069 Averiguar el carácter de las curvas discriminantes de la familia de curvas siguientes (c es el parámetro)

a) $y = (x - c)^3$ (parábola cúbica)

Desarrollo

Sea $f(x, y, c) = y - (x - c)^3$, de donde

$f'_c(x, y, c) = 3(x - c)^2$ ahora formando el sistema

$$\begin{cases} f(x, y, c) = y - (x - c)^3 = 0 & \dots (1) \\ f'_c(x, y, c) = 3(x - c)^2 = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

de la ecuación (2) se tiene: $x = c$

al reemplazar en la ecuación (1) se tiene $y = 0$ por lo tanto la curva discriminante $y = 0$ es el lugar geométrico de los puntos de inflexión y la envolvente de la familia dada.

b) $y^2 = (x - c)^3$ (parábolas semi cúbicas)

Desarrollo

Sea $f(x, y, c) = y^2 - (x - c)^3$ de donde $f'_c(x, y, c) = 3(x - c)^2$

Ahora formamos el sistema siguiente

$$\begin{cases} f(x, y, c) = y^2 - (x - c)^3 = 0 & \dots (1) \\ f'_c(x, y, c) = 3(x - c)^2 = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

de la ecuación (2) se tiene $x = c$ que al reemplazar en (1) se tiene $y = 0$, luego la curva discriminante $y = 0$ es el lugar geométrico de los puntos cuspidos y la envolvente de la familia.

c) $y^3 = (x - c)^2$ (parábola de Nail)

Desarrollo

Sea $f(x, y, c) = y^3 - (x - c)^2$ de donde $f'_c(x, y, c) = 2(x - c)$

Ahora formando el sistema se tiene:

$$\begin{cases} f(x, y, c) = y^3 - (x - c)^2 = 0 \\ f'_c(x, y, c) = 2(x - c) = 0 \end{cases}$$

de la ecuación (2) se tiene $x = c$, que al reemplazar en (1) se tiene $y = 0$ por lo tanto la curva discriminante $y = 0$ es el lugar geométrico de los puntos cuspidales pero que no es de la envolvente.

d) $(a + x)(y - c)^2 = x^2(a - x)$ (estrofoide)

Desarrollo

Sea $f(x, y, c) = (a + x)(y - c)^2 - x^2(a - x)$ de donde

$f'_c(x, y, c) = -2(a + x)(y - c)$, ahora formamos el sistema

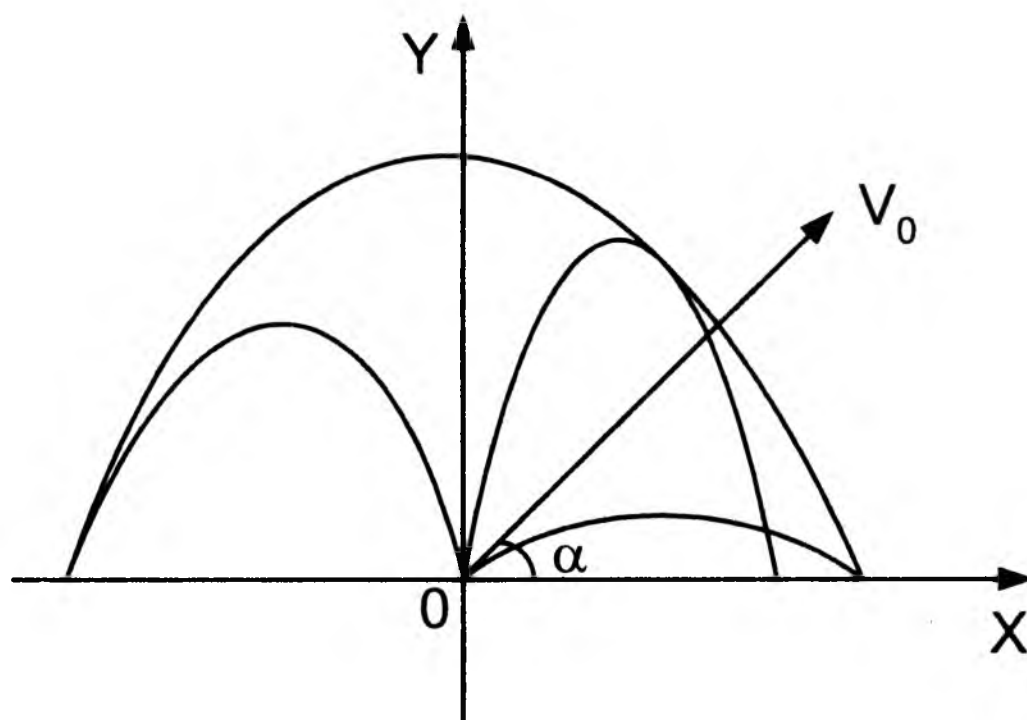
$$\begin{cases} f(x, y, c) = (a + x)(y - c)^2 - x^2(a - x) = 0 \\ f'_c(x, y, c) = -2(a + x)(y - c) = 0 \end{cases}$$

de la ecuación (2) se tiene $y = c$, que al reemplazar en la ecuación (1) se tiene $x = 0$, $x = a$, luego la curva discriminante se descompone en las rectas $x = 0$ (que es el lugar geométrico de los puntos cónicos) y $x = a$ (que es la envolvente).

2070 La ecuación de la trayectoria que sigue un proyectil lanzado desde el punto O, con la velocidad inicial V_0 y formando un ángulo α con la horizontal

(prescindiendo de la resistencia del aire), es $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}$ tomando

el ángulo α como parámetro, hallar la envolvente de todas las trayectorias del proyectil situados en un mismo plano vertical (parábola de seguridad) ver figura.



Desarrollo

Sea $f(x, y, \alpha) = y - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}$, de donde

$f'_\alpha(x, y, \alpha) = -x \sec^2 \alpha + \frac{gx^2 \sec^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{V_0^2}$, ahora formando el sistema se tiene:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = y - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = 0 & \dots (1) \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = -x \sec^2 \alpha + \frac{gx^2 \sec^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{V_0^2} = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

de la ecuación (1) se tiene: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_0^2}{gx}$ que al reemplazar en (1)

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2}$$

6.17. LONGITUD DE UN ARCO DE UNA CURVA EN EL ESPACIO.-

La diferencial del arco de una curva en el espacio en coordenadas cartesianas rectangulares es: $dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ desde x, y, z son las coordenadas variables del punto de la curva.

Si $X = x(t)$, $Y = y(t)$, $Z = z(t)$ son las ecuaciones paramétricas de la curva en el espacio, la longitud en el intervalo comprendido entre $t = t_1$ y $t = t_2$ será:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Hallar la longitud de los arcos de las curvas que se dan en los problemas 2071 – 2076

2071 $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2t^3}{3}$ desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

Desarrollo

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \frac{2t^3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2t \\ \frac{dz}{dt} = 2t^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_0^2 \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} dt \\
 &= \int_0^2 \sqrt{(1 + 2t^2)^2} dt = \int_0^2 (1 + 2t^2) dt = \left(t + \frac{2t^3}{3}\right) \Big|_0^2 = 2 + \frac{16}{3} = \frac{22}{3}
 \end{aligned}$$

2072 $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = \frac{3}{\pi}t$ desde $t = 0$ hasta $t = \pi$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = \frac{3t}{\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2 \sin t \\ \frac{dy}{dt} = 2 \cos t \\ \frac{dz}{dt} = \frac{3}{\pi} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t + \frac{9}{\pi^2}} dt \\
 &= \sqrt{\frac{4\pi^2 + 9}{\pi^2}} \int_0^\pi dt = \sqrt{4\pi^2 + 9}
 \end{aligned}$$

073 $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ desde $t = 0$ hasta el valor arbitrario de t .

Desarrollo

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^t (\cos t - \sin t) \\ \frac{dy}{dt} = e^t (\sin t + \cos t) \\ \frac{dz}{dt} = e^t \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t) + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} dt = \int_0^1 e^t \sqrt{3} dt = \sqrt{3}(e^t - 1)
 \end{aligned}$$

2074 $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$ desde $x = 0$ hasta $x = 6$

Desarrollo

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ z = \frac{x^3}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = x \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^6 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \int_0^6 \sqrt{1 + x^2 + \frac{x^4}{4}} dx \\
 &= \int_0^6 \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2} dx = \int_0^6 \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \Big|_0^6 = 6 + 36 = 42
 \end{aligned}$$

2075 $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ desde el punto $O(0,0,0)$ hasta el punto $M(3,3,2)$.

Desarrollo

Parametrizando la curva se tiene:

$$\begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{3} \\ z = \frac{2x^3}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{2x^2}{9} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{9} + \frac{4x^4}{81}} dx \\
 &= \int_0^3 \sqrt{\left(1 + \frac{2x^2}{9}\right)^2} dx = \int_0^3 \left(1 + \frac{2x^2}{9}\right) dx = \left(x + \frac{2x^3}{27}\right) \Big|_0^3 = (3 + 2) - 0 = 5
 \end{aligned}$$

2076 $y = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$, $z = \frac{a}{4} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$ desde $O(0,0,0)$ hasta el punto $M(x_0, y_0, z_0)$

Desarrollo

$$\begin{cases} y = \arcsen\frac{x}{a} \\ z = \frac{a}{4} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{a^2}{2(a^2 - x^2)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{4(a^2 - x^2)^2}} dx = \int_0^{x_0} \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{2(a^2 - x^2)}\right)^2} dx \\
 &= \int_0^{x_0} \left(1 + \frac{a^2}{2(a^2 - x^2)}\right) dx = \left[x + \frac{a}{4} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\right] \Big|_0^{x_0} = x_0 + \frac{a}{4} \ln\left(\frac{a+x_0}{a-x_0}\right) = x_0 + z_0
 \end{aligned}$$

2077 La posición de un punto en cualquier instante t ($t > 0$) se determina para las ecuaciones $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$. Hallar la velocidad media del movimiento entre los instantes $t = 1$ y $t = 10$.

Desarrollo

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \ln t \\ z = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2 \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \\ \frac{dz}{dt} = 2t \end{cases}$$

$$S = \int_1^{10} \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2} dt = \int_1^{10} \sqrt{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^2} dt = \int_1^{10} \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = \left(t^2 + \ln t\right) \Big|_1^{10}$$

$$= (100 + \ln 10) - (1 + 0) = 99 + \ln 10$$

6.18. FUNCIÓN VECTORIAL DE UN ARGUMENTO ESCALAR.-

Ira. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL DE UN ARGUMENTO ESCALAR.

La función vectorial $\vec{a} = \vec{a}(t)$ puede determinarse dando las tres funciones escalares $a_x(t)$, $a_y(t)$ y $a_z(t)$ de sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas:

$$\vec{a} = a_x(t) \vec{i} + a_y(t) \vec{j} + a_z(t) \vec{k}$$

La derivada de la función vectorial $\vec{a} = \vec{a}(t)$ con respecto al argumento escalar t es una nueva función vectorial determinada por la igualdad.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{da_x(t)}{dt} \vec{i} + \frac{da_y(t)}{dt} \vec{j} + \frac{da_z(t)}{dt} \vec{k}$$

El modulo de la derivada de la función vectorial es igual a:

$$\left| \frac{d\vec{a}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{da_x(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_y(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_z(t)}{dt}\right)^2}$$

El extremo del radio variable $\vec{r} = \vec{r}(t)$ describe en el espacio una curva.

$$\vec{r} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

Que recibe el nombre de hodografo del vector \vec{r} .

La derivada $\frac{d\vec{r}}{dt}$ representa de por si un vector, tangente al hodografo en el punto correspondiente.

$|\frac{d\vec{r}}{dt}| = \frac{dS}{dt}$, donde s es la longitud del arco del hodografo, tomada desde cierto punto inicial. En particular $|\frac{d\vec{r}}{dt}| = 1$

Si el parámetro y es el tiempo, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ es el vector de la velocidad del extremo del vector \vec{r} , y $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w}$ es el vector de la aceleración de dicho extremo.

2do. REGLAS PRINCIPALES PARA LA DERIVACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES DE UN ARGUMENTO ESCALAR.-

$$\textcircled{1} \quad \frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt} - \frac{d\vec{c}}{dt}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dt}(m\vec{a}) = m\frac{d\vec{a}}{dt}, \text{ m es una constante}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{d}{dt}(\varphi \vec{a}) = \vec{a} \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \frac{d\vec{a}}{dt}, \varphi(t) \text{ es función de t.}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{d}{dt}(\vec{a} \vec{b}) = \vec{b} \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a} \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{d}{dt} \vec{a}(\varphi(t)) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\textcircled{7} \quad \vec{a} \frac{d\vec{a}}{dt} = 0, \text{ si } |\vec{a}| = \text{constante}$$

2078 Demostrar que la función vectorial $\vec{r} - \vec{r}_1 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t$ donde \vec{r}_1, \vec{r}_2 son los radios vectores de dos puntos dados, es la ecuación de una recta.

Desarrollo

Consideremos $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

como $\vec{r} - \vec{r}_1 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t$, se tiene:

$$(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} = ((x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k})t$$

$$\begin{cases} x - x_1 = (x_2 - x_1)t \\ y - y_1 = (y_2 - y_1)t \\ z - z_1 = (z_2 - z_1)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ t = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ t = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases}$$

de donde se tiene: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ que es la ecuación de una recta

2079 Determinar, que líneas son los hodrografos de las siguientes funciones vectoriales.

a) $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{c}$

b) $\vec{r} = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t$

c) $\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$

d) $\vec{r} = \vec{a} \cosh t + \vec{b} \sinh t$

donde \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son vectores constantes, al mismo tiempo los vectores \vec{a} y \vec{b} son perpendiculares entre si.

Desarrollo

a) Se tiene $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{c}$ donde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$$

como $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{c} \Rightarrow \vec{r} - \vec{c} = \vec{a}t$

$$(x-c_x)\vec{i} + (y-c_y)\vec{j} + (z-c_z)\vec{k} = a_x t\vec{i} + a_y t\vec{j} + a_z t\vec{k}$$

$$\begin{cases} x-c_x = a_x t \\ y-c_y = a_y t \\ z-c_z = a_z t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x-c_x}{a_x} \\ t = \frac{y-c_y}{a_y} \\ t = \frac{z-c_z}{a_z} \end{cases}$$

de donde se tiene: $\frac{x-c_x}{a_x} = \frac{y-c_y}{a_y} = \frac{z-c_z}{a_z}$ que es la ecuación de una recta.

$$\text{b) } \vec{r} = \vec{a} \cos t + \vec{b} \sin t \quad \dots (1)$$

multiplicando por \vec{a} a la ecuación (1)

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos t, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{porque } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos t \Rightarrow \cos t = \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

multiplicando por \vec{b} a la ecuación (1)

$$\vec{r} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right)^2 + \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \right)^2 = 1, \quad \text{que representa a una elipse}$$

$$\text{c) } \vec{r} = \vec{a} t^2 + \vec{b} t \quad \text{multiplicando por } \vec{a} \text{ y } \vec{b}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 t \Rightarrow t = \frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right)^2 \text{ representa a una parábola}$$

d) $\vec{r} = \vec{a} \cosh t + \vec{b} \sinh t$, multiplicando por \vec{a} y \vec{b}

$$\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cosh t \\ \vec{r} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 \sinh t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cosh t = \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \\ \sinh t = \frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \right)^2 - \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right)^2 = 1, \text{ que es la ecuación de una hipérbola.}$$

2080 Hallar la derivada de la función vectorial $\vec{a}(t) = a(t) \cdot \vec{a}^\circ(t)$, donde $a(t)$ es una función escalar, mientras que $\vec{a}^\circ(t)$ es un vector unidad, en los casos en que el vector $\vec{a}(t)$ varía.

- 1) Solamente en longitud
- 2) Solamente en dirección
- 3) En longitud y dirección (caso general)

Esclarecer el sentido geométrico de los resultados obtenidos

Desarrollo

Como $\vec{a}(t) = a(t) \cdot \vec{a}^\circ(t)$ se tiene:

1) $\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \vec{a}^\circ(t)$

$$2) \quad \frac{d \vec{a}(t)}{dt} = \vec{a} \cdot \frac{d}{dt} \vec{a}^\circ(t) \quad (\text{varia la dirección y sentido}).$$

$$3) \quad \frac{d}{dt} a(t) = \frac{d \vec{a}(t)}{dt} \cdot \vec{a}^\circ(t) + \vec{a}(t) \frac{d \vec{a}^\circ(t)}{dt}$$

2081 Aplicando las reglas para la derivación de funciones vectoriales de un argumento escalar, deducir la formula para la derivación del producto mixto de tres funciones vectoriales \vec{a} , \vec{b} , \vec{c}

Desarrollo

El producto mixto de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} es $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})) = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad \text{desarrollando se obtiene:}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})) = \frac{d \vec{a}}{dt} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot \left(\frac{d \vec{b}}{dt} \times \vec{c} \right) + \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \frac{d \vec{c}}{dt} \right)$$

2082 Hallar la derivada, con respecto al parámetro t, del volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores: $\vec{a}(t) = \vec{i} + t \vec{j} + t^2 \vec{k}$

$$\vec{b}(t) = 2t \vec{i} - \vec{j} + t^3 \vec{k}$$

$$\vec{c}(t) = -t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j} + \vec{k}$$

Desarrollo

El volumen del paralelepípedo = $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})) = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 2t & -1 & t^3 \\ -t^2 & t^3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{d}{dt}(t^4 + 2t^2 + 1) = 4t^3 + 4t = 4t(t^2 + 1)$$

- 2083** La ecuación de un movimiento es $\vec{r} = 3\cos t \vec{i} + 4\sin t \vec{j}$, donde t es el tiempo. Determinar la proyección de este movimiento, la velocidad y aceleración del mismo. Construir la trayectoria del movimiento y los vectores de la velocidad y de la aceleración para los instantes $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ y $t = \frac{\pi}{2}$

Desarrollo

$$\vec{r} = 3\cos t \vec{i} + 4\sin t \vec{j} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = -3\sin t \vec{i} + 4\cos t \vec{j}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -3\cos t \vec{i} - 4\sin t \vec{j}$$

$$t = 0, \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4\vec{j}, \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -3\vec{i}$$

$$t = \frac{\pi}{4}, \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{4\sqrt{2}}{2}\vec{j}, \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{4\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$t = \frac{\pi}{2}, \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -3\vec{i}, \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -4\vec{j}$$

- 2084** La ecuación de un movimiento es: $\vec{r} = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j} + 3t \vec{k}$. Determinar la trayectoria, velocidad y aceleración de este movimiento ¿A qué son iguales la magnitud de la velocidad y aceleración y cuales son sus direcciones en los instantes $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$?

Desarrollo

Como $\vec{r} = 2\cos t \vec{i} + 2\sin t \vec{j} + 3t \vec{k}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -2\sin t \vec{i} + 2\cos t \vec{j} + 3 \vec{k} = \vec{v}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -2\cos t \vec{i} - 2\sin t \vec{j} = \vec{w}$$

para $t = 0$, se tiene $\vec{v} = 2 \vec{j} + 3 \vec{k}$, $\vec{w} = -2 \vec{i}$

$t = \frac{\pi}{2}$, se tiene $\vec{v} = -2 \vec{i} + 3 \vec{k}$, $\vec{w} = -2 \vec{j}$

además $\forall t$, $|\frac{d\vec{r}}{dt}| = \sqrt{13}$, $|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}| = 2$

- 2085** La ecuación de un movimiento es: $\vec{r} = \cos \alpha \cos \omega t \vec{i} + \sin \alpha \cos \omega t \vec{j} + \sin \omega t \vec{k}$ donde α y ω son constantes y t es el tiempo. Determinar la trayectoria, la magnitud y la dirección de la velocidad y la aceleración del movimiento.

Desarrollo

$$\vec{r} = \cos \alpha \cos \omega t \vec{i} + \sin \alpha \cos \omega t \vec{j} + \sin \omega t \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega \cos \alpha \sin \omega t \vec{i} - \omega \sin \alpha \sin \omega t \vec{j} + \omega \cos \omega t \vec{k} \Rightarrow |\frac{d\vec{r}}{dt}| = \omega$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t \vec{i} - \omega^2 \sin \alpha \cos \omega t \vec{j} - \omega^2 \sin \omega t \vec{k} \Rightarrow |\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}| = \omega^2$$

- 2086** La ecuación del movimiento de un proyectil (prescindiendo de la resistencia del aire) es: $\vec{r} = \vec{r}_0 t - \frac{gt^2}{2} \vec{k}$, donde $\vec{r}_0 = (V_{ox} + V_{oy} + V_{oz})$ es la velocidad inicial. Hallar la velocidad y la aceleración en cualquier instante.

Desarrollo

$$\vec{r} = \vec{r}_0 t - \frac{gt^2}{2} \vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_0 - gt \vec{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g \vec{k}$$

Luego $V = \sqrt{V_{oz}^2 + V_{oy}^2 + (V_{ox} - gt)^2}$

- 2087** Demostrar, que si un punto se mueve por la parábola $y = \frac{x^2}{a}$, $z = 0$ de tal forma, que la proyección de la velocidad sobre el eje OX se mantiene constante ($\frac{dx}{dt} = \text{constante}$), la aceleración también se mantiene constante.

Desarrollo

Como $y = \frac{x^2}{a}$, $z = 0$ además $\frac{dx_i}{dy} = \hat{V}_x$; $|\hat{V}_x| = V_x = \text{constante}$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \hat{w}_x, \quad |\hat{w}_x| = w_x = 0 \quad \text{en este caso la aceleración se mantiene constante}$$

sobre la proyección OX, ahora consideremos \vec{r} un vector de posición

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + \frac{x^2}{a} \vec{j} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + \frac{2x}{a} \vec{j} = V_x$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{2}{a} \vec{j} = \vec{w}$$

Luego se mantiene constante para cualquier valor de t .

- 2088** Un punto situado en la rosca del tornillo, que se enrosca en una viga, describe una hélice circular $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = h\theta$ donde θ es el ángulo de giro del tornillo, a , el radio del tornillo y h la elevación correspondiente al giro de un radiante. Determinar la velocidad del movimiento del punto.

Desarrollo

Consideremos el vector de posición $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ y como $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = h\theta$ entonces $\vec{r} = a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{j} + h\theta \vec{k}$ de donde

$$\frac{d \vec{r}}{dt} = \frac{d \vec{r}}{d \theta} \cdot \frac{d \theta}{dt} = (-a \sin \theta \vec{i} + a \cos \theta \vec{j} + h \vec{k}) w \quad \text{donde} \quad \frac{d \theta}{dt} = w \quad (\text{velocidad de rotación del tornillo})$$

$$\text{Luego se tiene:} \quad \frac{d \vec{r}}{dt} = (-a \sin \theta \vec{i} + a \cos \theta \vec{j} + h \vec{k}) w$$

$$\left| \frac{d \vec{r}}{dt} \right| = w \sqrt{a^2 + h^2}$$

- 2089** Hallar la velocidad de un punto de la circunferencia de una rueda, de radio a , que gira con una velocidad angular constante w , de tal forma, que su centro, al ocurrir esto, se desplaza en línea recta con una velocidad constante V_0 .

Desarrollo

Consideremos el vector de posición de la trayectoria

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \Rightarrow \vec{r} = a \cos wt \vec{i} + a \sin wt \vec{j}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -aw \sin wt \vec{i} + aw \cos wt \vec{j}, \text{ donde } V_x = aw \sin wt, V_y = aw \cos wt$$

como la circunferencia se desplaza con una velocidad horizontal $\vec{i} V_0$

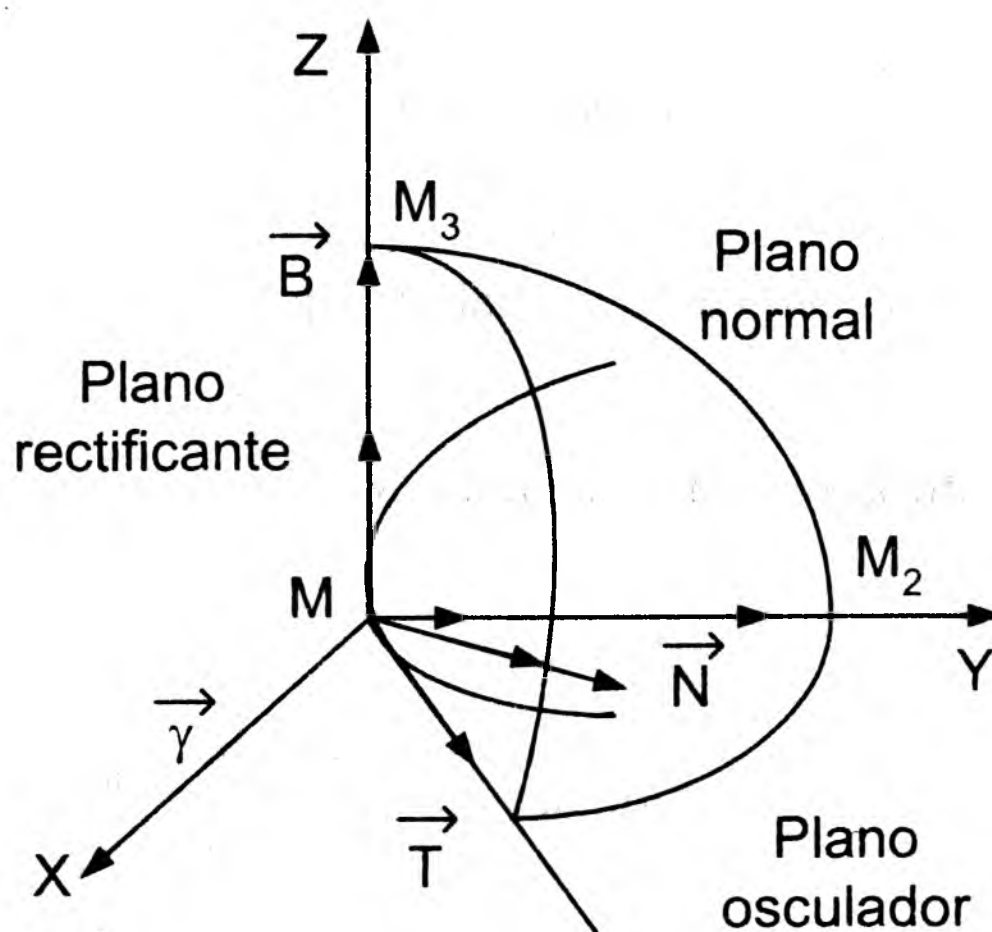
la velocidad final es \vec{V} : $\vec{V} = (V_0 - aw \sin wt) \vec{i} + aw \cos wt \vec{j}$ de donde

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{(V_0 - aw \sin wt)^2 + (aw \cos wt)^2}$$

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_0^2 + a^2 w^2 - 2awV_0 \sin wt}$$

6.19. TRIEDRO INTRÍNSECO DE UNA CURVA EN EL ESPACIO.-

En todo punto $M(x,y,z)$ que no sea singular, de una curva en el espacio $\vec{r} = \vec{r}(t)$, se puede construir un triedro intrínseco formado por tres planos perpendiculares entre si. Ver figura.



- 1) El plano osculador MM_1M_2 , en el que están situados los vectores $\frac{d\vec{r}}{dt}$ y $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
- 2) El plano normal MM_2M_3 , perpendicular al vector $\frac{d\vec{r}}{dt}$ y
- 3) El plano rectificante MM_1M_3 , perpendicular a los dos planos primeros.

Las intersecciones de estos tres planos forman tres rectas:

- i) la tangente MM_1
- ii) La normal principal MM_2
- iii) la binormal MM_3

que se determinan respectivamente por los vectores

- 1) $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (vector de la tangente)
- 2) $\vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (vector de la binormal)
- 3) $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$ (Vector de la normal principal)

Los correspondientes vectores unitarios $\hat{T} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}$, $\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$, $\hat{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$

Se pueden calcular por las formulas $\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{dS}$, $\hat{N} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dS}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dS}\right|}$, $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$

Si X, Y, Z , son las coordenadas variables del punto de la tangente, las ecuaciones de dichas tangentes en el punto $M(x,y,z)$ tendrán la forma.

$$\boxed{\frac{X-x}{T_x} = \frac{Y-y}{T_y} = \frac{Z-z}{T_z}} \quad \dots (1)$$

donde $T_x = \frac{dx}{dt}$, $T_y = \frac{dy}{dt}$, $T_z = \frac{dz}{dt}$

partiendo de la condición de perpendicularidad de la recta y el plano, obtenemos la ecuación del plano normal.

$$\boxed{T_x(X-x) + T_y(Y-y) + T_z(Z-z) = 0} \quad \dots (2)$$

sustituyendo en las ecuaciones (1) y (2)

T_x, T_y, T_z por B_x, B_y, B_z y N_x, N_y, N_z obtenemos las ecuaciones de las rectas binormal y normal principal y respectivamente, de los planos osculador y rectificante.

Si la curva en el espacio se da como la intersección de dos superficies

$F(x,y,z) = 0$, $G(x,y,z) = 0$ en lugar de los vectores $\frac{d\vec{r}}{dt}$ y $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ se puede

tomar los vectores $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ y $d^2\vec{r} = (d^2x, d^2y, d^2z)$, pudiéndose considerar una de las variables x, y, z como independiente y suponer su segunda diferencial es iguala cero.

- 2090** Hallar los vectores unitarios principales $\hat{T}, \hat{B}, \hat{N}$ de la curva $x = 1 - \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ en el punto $t = \frac{\pi}{2}$

Desarrollo

Sea $\vec{r}(t) = (1 - \cos t, \sin t, t)$ entonces

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\sin t, \cos t, 1), \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\text{para } t = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 0, 1), \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (0, -1, 0)$$

$$\text{de donde } \vec{T} = (1, 0, 1) \Rightarrow \hat{T} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 0, -1)$$

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 0)$$

$$\hat{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = (0, -1, 0) = -\vec{j}$$

- 2091** Hallar los vectores unitarios de la tangente y normal principal de la espiral cónica $\vec{r}(t) = e^t (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \vec{k})$ en un punto arbitrario. Determinar los ángulos que forman estas rectas con el eje OZ.

Desarrollo

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = e^t (\cos t - \sin t) \vec{i} + e^t (\cos t + \sin t) \vec{j} + e^t \vec{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -2e^t \sin t \vec{i} + 2e^t \cos t \vec{j} + e^t \vec{k}$$

$$\vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t (\cos t - \sin t) & e^t (\cos t + \sin t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = e^{2t} (\sin t - \cos t) \vec{i} - e^{2t} (\sin t + \cos t) \vec{j} + 2e^{2t} \vec{k}$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^{2t} (\sin t - \cos t) & -e^{2t} (\sin t + \cos t) & 2e^{2t} \\ e^t (\cos t - \sin t) & e^t (\cos t + \sin t) & e^t \end{vmatrix}$$

$$\vec{N} = -3e^{3t} (\sin t + \cos t) \vec{i} - 3e^{3t} (\sin t - \cos t) \vec{j}$$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow |\vec{T}| = e^t \sqrt{3}$$

$$\hat{T} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}} \vec{i} + \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{k}$$

$$\hat{N} = -\sqrt{2}\left(\frac{\sin t + \cos t}{2}\right)\vec{i} - \sqrt{2}\left(\frac{\sin t - \cos t}{2}\right)\vec{j}$$

$$\begin{cases} \cos \angle(\hat{T}, OZ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos \angle(\hat{N}, OZ) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle(\hat{T}, OZ) = \frac{\pi}{6} \\ \angle(\hat{N}, OZ) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2092 Hallar los vectores unitarios principales \hat{T} , \hat{B} , \hat{N} de la curva $y = x^2$, $z = 2x$ en el punto $x = 2$.

Desarrollo

Sea $\vec{r} = (x, x^2, 2x)$ de donde $\frac{d\vec{r}}{dx} = (1, 2x, 2)$, $\frac{d^2\vec{r}}{dx^2} = (0, 2, 0)$ para $x = 2$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dx} = (1, 4, 2) \Rightarrow |\vec{T}| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$$

$$\hat{T} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right) \text{ como } \frac{d\vec{r}}{dx} = (1, 4, 2), \frac{d^2\vec{r}}{dx^2} = (0, 2, 0)$$

$$\vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dx} \times \frac{d^2\vec{r}}{dx^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 0, 2)$$

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \left(-\frac{4}{\sqrt{20}}, 0, \frac{2}{\sqrt{20}}\right)$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-8, 10, -16)$$

$$\hat{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left(-\frac{8}{2\sqrt{105}}, \frac{10}{2\sqrt{105}}, -\frac{16}{2\sqrt{105}} \right) = \left(-\frac{4}{\sqrt{105}}, \frac{5}{\sqrt{105}}, -\frac{8}{\sqrt{105}} \right)$$

- 2093** Dada la hélice circular $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ escribir las ecuaciones de las rectas que forman las aristas del tetraedro intrínseco en un punto arbitrario de dicha línea. Determinar los cosenos directores de la tangente y de la normal principal.

Desarrollo

Sea $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, derivando

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-a \sin t, a \cos t, b) \Rightarrow |\vec{T}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

de donde $\hat{T} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|} = \left(-\frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-a \cos t, -a \sin t, 0), \text{ ahora calculamos}$$

$$\vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2)$$

$$\vec{B} = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2) \Rightarrow |\vec{B}| = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \left(\frac{ab \sin t}{a\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{ab \cos t}{a\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a^2}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\hat{B} = \left(\frac{b \operatorname{sent}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-b \operatorname{cost}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ab \operatorname{sent} & -ab \operatorname{cost} & a^2 \\ -a \operatorname{sent} & a \operatorname{cost} & b \end{vmatrix} = (-(ab^2 + a^3) \operatorname{cost}, -(ab^2 + a^3) \operatorname{sent}, 0)$$

$$|\vec{N}| = (ab^2 + a^3) \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sent}^2 t} = a(a^2 + b^2)$$

$$\hat{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = (-\operatorname{cost}, -\operatorname{sent}, 0)$$

Luego la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto

$$(a \cos t, a \operatorname{sent} t, bt) \text{ es: } \frac{x - a \operatorname{cost}}{-a \operatorname{sent}} = \frac{y - a \operatorname{sent}}{a \operatorname{cost}} = \frac{z - bt}{b}$$

$$\text{La recta binomial es: } \frac{x - a \operatorname{cost}}{b \operatorname{sent}} = \frac{y - a \operatorname{sent}}{-b \operatorname{cost}} = \frac{z - bt}{a}$$

$$\text{La recta normal principal se tiene: } \frac{x - a \operatorname{cost}}{\operatorname{cost}} = \frac{y - a \operatorname{sent}}{\operatorname{sent}} = \frac{z - bt}{a}$$

Los coseno directores son:

$$\cos \alpha = \frac{-a \operatorname{sent}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a \operatorname{cost}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Y los cosenos directores de normal principal son: $\cos \alpha_1 = \operatorname{cost}$,
 $\cos \beta_1 = \operatorname{sent}$, $\cos \gamma_1 = 0$

- 2094** Escribir las ecuaciones de los planos que forman el tetraedro intrínseco de la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en el punto $M(2,4,8)$.

Desarrollo

Sea $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, de donde se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 2t, 3t^2) \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (0, 2, 6t) \end{array} \right. \text{ para } t = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 4, 12) \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (0, 2, 12) \end{array} \right.$$

$$\vec{B} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} = (24, -12, 2)$$

La ecuación de la tangente en el punto $M(2,4,8)$ se tiene:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-8}{12}$$

La ecuación del plano osculador es:

$$24(x-2) - 12(y-4) + 2(z-8) = 0 \text{ de donde } 12x - 6y + z - 8 = 0$$

$$\text{La ecuación del plano normal es: } 1(x-2) + 4(y-4) + 12(z-8) = 0$$

$$\therefore x + 4y + 12z - 114 = 0$$

- 2095** Escribir las ecuaciones de los planos que forman el tetraedro intrínseco de la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ en el punto $M(1,1,2)$

Desarrollo

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \text{ parametrizando la curva se tiene:}$$

sumando las dos ecuaciones se tiene:

$$2x^2 + 2z^2 = 10 \Rightarrow x^2 + z^2 = 5 \Rightarrow z = \sqrt{5 - x^2} \text{ además } y^2 = 1 \Rightarrow y = 1$$

Sea $\vec{r}(t) = (t, 1, \sqrt{5 - t^2})$ para $t = 1$ se tiene:

$$\vec{r}'(t) = (1, 0, -\frac{t}{\sqrt{5 - t^2}}) \Rightarrow \vec{r}'(1) = (1, 0, -\frac{1}{2})$$

la ecuación del plano normal es:

$$1(x - 1) - 0(y - 1) - \frac{1}{2}(z - 2) = 0 \text{ de donde } 2x - z = 0$$

$$\vec{r}'(t) = (1, 0, -\frac{t}{\sqrt{5 - t^2}}) \Rightarrow \vec{r}''(t) = (0, 0, -\frac{5}{(5 - t^2)^{\frac{3}{2}}}) \Rightarrow \vec{r}''(1) = (0, 0, -\frac{5}{8})$$

$$\vec{B} = \vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{8} \end{vmatrix} = (0, \frac{5}{8}, 0)$$

La ecuación del plano osculador es: $0(x - 1) + \frac{5}{8}(y - 1) + 0(z - 2) = 0$

de donde se tiene: $y - 1 = 0$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{5}{16}, 0, -\frac{5}{8}\right) = -\frac{5}{16}(1, 0, 2)$$

La ecuación del plano rectificante es: $1(x - 1) + 0(y - 1) + 2(z - 2) = 0$

$$\therefore 2x + z - 5 = 0$$

- 2096** Hallar las ecuaciones de la tangente, de la normal principal y de la binormal en un punto arbitrario de la curva: $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$. Hallar los puntos en que la tangente a esta curva es paralela al plano $x + 3y + 2z - 10 = 0$

Desarrollo

$$\text{Sea } \vec{r}(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right) \Rightarrow \vec{r}'(t) = (t^3, t^2, t) = \vec{T}$$

$$\vec{r}''(t) = (3t^2, 2t, 1)$$

$$\vec{B} = \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^3 & t^2 & t \\ 3t^2 & 2t & 1 \end{vmatrix} = (-t^2, 2t^3, -t^4) = t^2(-1, 2t, -t^2)$$

$$\begin{aligned} \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -t^2 & 2t^3 & -t^4 \\ t^3 & t^2 & t \end{vmatrix} = (t^6 + 2t^4, t^3 - t^7, -t^4 - 2t^6) \\ &= t^3(t^3 + 2t, 1 - t^4, -t - 2t^3) \end{aligned}$$

La ecuación de la tangente que pasa por el punto $M(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2})$ es:

$$\frac{x - \frac{t^4}{4}}{t^2} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{1}$$

La ecuación de la binormal es: $\frac{x - \frac{t^4}{4}}{-1} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{2t} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{-t^2}$

La ecuación de la normal principal es: $\frac{x - \frac{t^4}{4}}{2t + t^4} = \frac{y - \frac{t^3}{3}}{1 - t^4} = \frac{z - \frac{t^2}{2}}{-t - 2t^3}$

Si $P: x + 3y + 2z - 10 = 0$ entonces

$$\vec{r}'(t) // P \Leftrightarrow \vec{r}'(t) \perp \vec{N} = (1, 3, 2) \Rightarrow \vec{r}'(t) \cdot \vec{N} = 0$$

$$(1, 3, 2) \cdot (t^3, t^2, t) = 0 \Rightarrow t^3 + 3t^2 + 2t = 0$$

$$t(t^2 + 3t + 2) = 0 \Rightarrow t = 0, t = -1, t = -2$$

para $t = 0, x = 0, y = 0, z = 0$

$$t = -1, x = \frac{1}{4}, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{1}{2}$$

$$t = -2, x = 4, y = -\frac{8}{3}, z = 2$$

- 2097** Hallar las ecuaciones de la tangente, del plano osculador, de la normal principal y de la binomial de la curva $x = t, y = -t, z = \frac{t^2}{2}$ en el punto $t = 2$. Calcular los cosenos directores de la binomial en este punto.

Desarrollo

$$\text{Sea } \vec{r}(t) = (t, -t, \frac{t^2}{2}) \Rightarrow \vec{r}'(t) = (1, -1, t)$$

$$\vec{r}''(t) = (0, 0, 1)$$

$$\text{para } t = 2, \vec{T} = (1, -1, 2), \vec{r}''(2) = (0, 0, 1)$$

$$\vec{B} = \vec{r}'(1) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 0)$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 2) = 2(-1, 1, 1) = -2(1, -1, -1)$$

$$\text{para } t = 2 \text{ se tiene } x = z = 2, y = -2, P(2, -2, 2)$$

$$\text{La recta tangente: } \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

$$\text{Recta normal es: } \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$$

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{el plano osculador es: } 1(x-2) + 1(y+2) + 0(z-2) = 0 \quad \therefore x + y = 0$$

$$\text{Los cosenos directores de la binomial es: } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \gamma = 0$$

2098 Escribir las ecuaciones de la tangente y del plano osculador a las curvas siguientes.

a) $x = R^2 \cos t$, $y = R \sin t \cos t$, $z = R \sin t$, cuando $t = \frac{\pi}{4}$

b) $z = x^2 + y^2$, $x = y$ en el punto $(1,1,2)$

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + z = 5$ en el punto $(2, 2\sqrt{3}, 3)$

Desarrollo

a) Sea $\vec{r}(t) = (R \cos^2 t, R \sin t \cos t, R \sin t)$

$$\vec{r}'(t) = (-R \sin 2t, R \cos 2t, R \cos t)$$

$$\vec{r}''(t) = (-2R \cos 2t, -2R \sin 2t, -R \sin t)$$

para $t = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{R}{2}$, $y = \frac{R}{2}$, $z = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-R, 0, \frac{R\sqrt{2}}{2}) = -\frac{R}{2}(2, 0, -\sqrt{2})$$

La recta tangente es: $\frac{x - \frac{R}{2}}{2} = \frac{y - \frac{R}{2}}{0} = \frac{z - \frac{R}{\sqrt{2}}}{-\sqrt{2}}$

La ecuación del plano normal es: $2(x - \frac{R}{2}) + 0(y - \frac{R}{2}) - \sqrt{2}(z - \frac{R}{\sqrt{2}}) = 0$

es decir: $\sqrt{2}x - z = 0$

b) $z = x^2 + y^2, y = x \Rightarrow z = 2x^2$. Sea $\vec{r}(t) = (t, t, 2t^2)$

Calculando $t = ?$ se tiene $(t, t, 2t^2) = (1, 1, 2) \Rightarrow t = 1$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= (1, 1, 4t) \\ \vec{r}''(t) &= (0, 0, 4) \end{aligned} \quad \text{para } t = 1 \quad \begin{cases} \vec{r}'(1) = (1, 1, 4) \\ \vec{r}''(1) = (0, 0, 4) \end{cases}$$

la recta tangente es: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4}$

La ecuación del plano normal es: $1(x-1) + 1(y-1) + 4(z-2) = 0$

$\therefore x + y + 4z - 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25, x + z = 5 \Rightarrow z = 5 - x$

$x^2 + y^2 + (5-x)^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 10x$

$y = \sqrt{10x - 2x^2}$ de donde $\vec{r}(t) = (t, \sqrt{10t - 2t^2}, 5-t)$ para $t = 2$

$\vec{r}'(t) = (1, \frac{5-2t}{\sqrt{10t-2t^2}}, -1) \Rightarrow \vec{r}'(2) = (1, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{3})$

La recta de la tangente es: $\frac{x-2}{2\sqrt{3}} = \frac{y-2\sqrt{3}}{1} = \frac{z-3}{-2\sqrt{3}}$

La ecuación del plano normal: $2\sqrt{3}(x-2) + 1(y-2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}(z-3) = 0$

Es decir: $2\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3}z = 0$

2099 Hallar la ecuación del plano normal a la curva $z = x^2 + y^2, y = x$ en el origen de coordenadas.

Desarrollo

$$C: \begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ y = x \end{cases} \text{ parametrizando la curva se tiene:}$$

$y = x, \quad z = x^2 - x^2 = 0$ de donde $\vec{\alpha}(t) = (t, t, 0)$, para $t = t_0$ se tiene:

$$\vec{\alpha}(t_0) = (t_0, t_0, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow t_0 = 0$$

$$\vec{\alpha}'(t) = (1, 1, 0) \Rightarrow \vec{\alpha}'(0) = (1, 1, 0)$$

la ecuación del plano normal es: $1(x - 0) + 1(y - 0) + 0(z - 0) = 0$

$$\therefore x + y = 0$$

- 2100** Hallar la ecuación del plano osculador a la curva $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = \sqrt{2}t$ en el punto $t = 0$.

Desarrollo

$$\text{Sea } \vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$$

$$\begin{cases} \vec{r}'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \\ \vec{r}''(t) = (e^t, e^{-t}, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}'(0) = (1, -1, \sqrt{2}) \\ \vec{r}''(0) = (1, 1, 0) \end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$$

La ecuación del plano normal es: $-\sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{2}(y - 1) + 2(z - 0) = 0$

$$\therefore \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 2z = 0$$

2101 Hallar las ecuaciones de los planos osculador a las curvas:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 3$ en el punto $(2,1,2)$

Desarrollo

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 3} \\ z = \sqrt{12 - 2x^2} \end{cases}$$

Sea $\vec{r}(t) = (t, \sqrt{t^2 - 3}, \sqrt{12 - 2t^2})$, $t = 2$

$$\begin{cases} \vec{r}'(t) = (1, \frac{t}{\sqrt{t^2 - 3}}, \frac{-2t}{\sqrt{12 - 2t^2}}) \\ \vec{r}''(t) = (0, \frac{-3}{(t^2 - 3)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{24}{(12 - 2t^2)^{\frac{3}{2}}}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}'(2) = (1, 2, -2) \\ \vec{r}''(2) = (0, -3, -3) \end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{r}'(2) \times \vec{r}''(2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (-12, 3, -3)$$

La ecuación del plano osculador es: $-12(x - 2) + 3(y - 1) - 3(z - 2) = 0$

$$\therefore 4x - y + z = 9$$

b) $x^2 = 4y$, $x^3 = 24z$ en el punto $(6,9,9)$

Desarrollo

$$C: \begin{cases} x^2 = 4y \\ x^3 = 24z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ z = \frac{x^3}{24} \end{cases}$$

Sea $\vec{r}(t) = (t, \frac{t^2}{4}, \frac{t^2}{24})$ donde $t = 6$

$$\begin{cases} \vec{r}'(t) = (1, \frac{t}{2}, \frac{t}{8}) \\ \vec{r}''(t) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}'(6) = (1, 3, \frac{9}{2}) = \frac{1}{2}(2, 6, 9) \\ \vec{r}''(6) = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}(0, 1, 3) \end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{r}'(6) \times \vec{r}''(6) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (9, -6, 2)$$

La ecuación del plano osculador es: $9(x - 6) - 6(y - 9) + 2(z - 9) = 0$

$$\therefore 9x - 6y + 2z = 18$$

c) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$ en cualquier punto de la curva (x_0, y_0, z_0)

Desarrollo

$$C: \begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a^2 - z^2} \\ y = \sqrt{b^2 - z^2} \end{cases}$$

Sea $\vec{r}(t) = (\sqrt{a^2 - t^2}, \sqrt{b^2 - t^2}, t)$, $t = z_0$

$$\begin{cases} \vec{r}'(t) = (-\frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}, -\frac{t}{\sqrt{b^2 - t^2}}, 1) \\ \vec{r}''(t) = (-\frac{a^2}{(a^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{b^2}{(b^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}}, 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} = \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}} & -\frac{t}{\sqrt{b^2 - t^2}} & 1 \\ -\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - t^2)^3}} & -\frac{b^2}{\sqrt{(b^2 - t^2)^3}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(b^2 - t^2)(a^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}} [b^2(a^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}, a^2(b^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}, -t^3b^2 + t^3a^2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_0^3 y_0^3}} (b^2 x_0^3, a^2 y_0^3, z_0^3(-b^2 + a^2))\end{aligned}$$

La ecuación del plano osculador es:

$$b^2 x_0^3 (x - x_0) + a^2 y_0^3 (y - y_0) + z_0^3 (-b^2 + a^2) (z - z_0) = 0$$

$$b^2 x_0^3 x - a^2 y_0^3 y + (-b^2 + a^2) z_0^3 z = b^2 x_0^4 + a^2 y_0^4 + z_0^4 (-b^2 + a^2)$$

$$= b^2 (x_0^4 - z_0^4) + a^2 (y_0^4 + z_0^4) = a^2 b^2 (a^2 + b^2 - 4z_0) + 2a^4 z_0^4$$

- 2102** Hallar las ecuaciones del plano osculador, de la normal principal y de la binormal a la curva $y^2 = x$, $x^2 = z$ en el punto $(1,1,1)$.

Desarrollo

$$C: \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ z = y^4 \end{cases}$$

$$\text{Sea } \vec{r}(t) = (t^2, t, t^4), \quad t = 1$$

$$\begin{cases} \vec{r}'(t) = (2t, 1, 4t^3) \\ \vec{r}''(t) = (2, 0, 12t^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}'(1) = (2, 1, 4) = \vec{T}(1) \\ \vec{r}''(1) = (2, 0, 12) \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 12 \end{vmatrix} = (12, -16, -2) = 2(6, -8, -1)$$

La ecuación del plano osculador es: $6(x - 1) - 8(y - 1) - 1(z - 1) = 0$

$$\therefore 6x - 8y - z + 3 = 0$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -8 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-31, -26, 22) = -(31, 26, -22)$$

La ecuación de la recta binormal que pasa por el punto (1,1,1) es:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$$

La ecuación de la normal principal $\frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$

- 2103** Hallar la ecuación del plano osculador, de la normal principal y de la binormal a la hélice cónica $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = bt$ en el origen de coordenadas. Hallar los vectores unitarios de la tangente, de la normal principal y de la binormal en el origen de coordenadas.

Desarrollo

Sea $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, bt)$ en $t = 0$

$$\begin{cases} \vec{r}'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, b) \\ \vec{r}''(t) = (-2 \sin t - t \cos t, 2 \cos t - t \sin t, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}'(0) = (1, 0, b) = \vec{T}(0) \\ \vec{r}''(0) = (0, 2, 0) \end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2b, 0, 2) = 2(-b, 0, 1)$$

La ecuación del plano osculador es: $-b(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0$

$$\therefore -bx + z = 0$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = (0, b^2 + 1, 0)$$

La ecuación del plano rectificante que pasa por el punto $(0,0,0)$ es:

$$0(x - 0) + (b^2 + 1)(y - 0) + 0(z - 0) = 0 \quad \therefore y = 0$$

y la ecuación de la binormal (recta) es la intersección de los planos normal y

rectificante es decir: $L_B : \begin{cases} x + bz = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

6.20. CURVATURA DE FLEXIÓN Y DE TORSIÓN DE UNA CURVA EN EL ESPACIO.-

1er. CURVATURA DE FLEXION.-

La curvatura de flexión de una curva en un punto M, es el número

$$k = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s}, \text{ donde } \varphi \text{ es el ángulo de giro de la tangente (ángulo de}$$

contingencia) en el segmento de curva MN y Δs , la longitud del arco de este segmento de curva R se llama radio de curvatura de flexión.

Si la curva se da por la ecuación $\vec{r} = \vec{r}(s)$ donde s es la longitud de arco, tendremos:

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right|$$

para el caso en que la curva se da en forma paramétrica general, tenemos:

$$\frac{1}{R} = \frac{\left| \frac{d \vec{r}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d \vec{r}}{dt} \right|^3}$$

2do. CURVATURA DE TORSIÓN.-

Se entiende por curvatura de torsión de una curva en el punto M, el número

$$T = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta s}$$

donde θ es el ángulo de giro de la binormal (ángulo de contingencia de la curva \widehat{MN}). La magnitud ρ se llama radio de curvatura de la torsión.

Si $\vec{r} = \vec{r}(s)$ se tiene:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \frac{\frac{d \vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^3 \vec{r}}{ds^3}}{\left(\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right)^2}$$

donde el signo menos se toma cuando los vectores $\frac{d\beta}{ds}$ y \vec{v} tienen la misma dirección, y el signo más en el caso contrario.

Si $\vec{r} = \vec{r}(t)$ donde t es un parámetro arbitrario se tendrá:

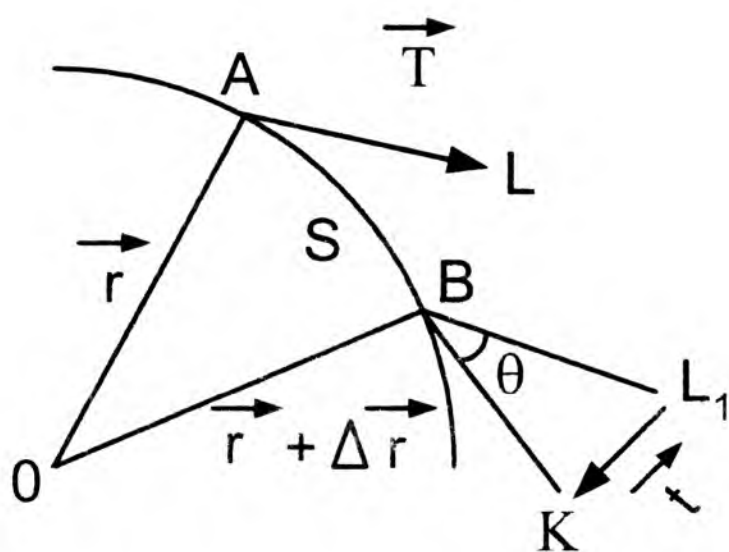
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}$$

3ra. FÓRMULA DE FRENET.-

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{V}{R}, \quad \frac{dV}{ds} = -\frac{\tau}{R} + \frac{\beta}{\rho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{V}{\rho}$$

2104 Demostrar, que si la curvatura de flexión es igual a cero en todos los puntos de una línea, esta es una recta.

Desarrollo



Del triángulo BkL_1 se tiene:

$$\vec{BK} = \vec{BL_1} + \vec{L_1k} \quad \text{donde} \quad \vec{L_1k} = \vec{t}$$

como la longitud del vector \vec{t} es el mismo entonces

$|\vec{t}| = |\vec{t} + \Delta t|$ por lo tanto el ΔBkL_1 es isósceles y el ángulo θ es el vértice de la tangente a la curva cuando pasa del punto A al punto B, como

$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\theta}{\Delta s} \right|$ como $\theta = 0$, puesto que el ángulo de rotación se confunde con

la recta. Luego se concluye: $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\theta}{\Delta s} \right| = 0$

- 2105** Demostrar, que si la curvatura de torsión es igual a cero en todo los puntos de una curva, esta es una curva plana.

Desarrollo

La demostración es similar al ejercicio 2104, por lo tanto se deja como un entrenamiento.

- 2106** Demostrar, que la curva $x = 1 + 3t + 2t^2$, $y = 2 - 2t + 5t^2$, $z = 1 - t^2$ es plana, hallar el plano en que se encuentra.

Desarrollo

$$\text{Como } \begin{cases} x = 1 + 3t + 2t^2 & \dots (1) \\ y = 2 - 2t + 5t^2 & \dots (2) \\ z = 1 - t^2 & \dots (3) \end{cases}$$

$$\text{Eliminamos el parámetro } t, \text{ se tiene: } \begin{cases} 2x = 2 + 6t + 4t^2 \\ 3y = 6 - 6t + 15t^2 \\ 19z = 19 - 19t^2 \end{cases}$$

sumando las tres ecuaciones tenemos $2x + 3y + 19z = 27$, que es la ecuación del plano en donde se encuentra la curva.

- 2107** Calcular la curvatura de las líneas

a) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cosh t$, cuando $t = 0$

Desarrollo

Sea $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t)$, de donde

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= (-\sin t, \cos t, \sinh t) & \Rightarrow & \vec{r}'(0) = (0, 1, 0) \\ \vec{r}''(t) &= (-\cos t, -\sin t, \cosh t) & \Rightarrow & \vec{r}''(0) = (-1, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 1)$$

$$k = \frac{|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)|}{|\vec{r}'(0)|^3} = \frac{|(1, 0, 1)|}{|(0, 1, 0)|^3} = \sqrt{2}$$

b) $x^2 - y^2 + z^2 = 1, \quad y^2 - 2x + z = 0$ en el punto $(1, 1, 1)$

Desarrollo

Sea $C: \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 - 2x + z = 0 \end{cases}$ parametrizando la curva se tiene:

Al suma las dos ecuaciones se tiene: $x^2 + z^2 - 2x + z = 1$, completando

cuadrados se tiene: $(x-1)^2 + (z^2 + z + \frac{1}{4}) = 2 + \frac{1}{4}$

$$(x-1)^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \quad \text{entonces} \quad x = 1 + \frac{3}{2} \cos t, \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin t$$

$$y = \sqrt{2 + 3 \cos t + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin t} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{5}{2} + 3 \cos t - \frac{3}{2} \sin t}$$

Sea $\vec{r}(t) = (1 + \frac{3}{2} \cos t, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin t, \sqrt{\frac{5}{2} + 3 \cos t - \frac{3}{2} \sin t})$

$$\vec{r}'(t) = (-\frac{3}{2} \sin t, \frac{3}{2} \cos t, -\frac{3 \sin t + \frac{3}{2} \cos t}{2\sqrt{\frac{5}{2} + 3 \cos t - \frac{3}{2} \sin t}})$$

$$\vec{r}''(t) = \left(-\frac{3}{2}\cos t, -\frac{3}{2}\sin t, -\frac{3}{2}\left(\frac{\cos t - \frac{\sin t}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2} + 3\cos t - \frac{3}{2}\sin t}} + \frac{3}{2}\frac{(\sin t + \frac{\cos t}{2})^2}{(\frac{5}{2} + 3\cos t - \frac{3}{2}\sin t)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right), \quad \vec{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \vec{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{9}{4}(-1, 1, 1)$$

$$k = \frac{|\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \vec{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right)|}{|\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)|^3} = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^3} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

2108 Calcular las curvatura de flexión y de torsión de las siguientes curvas en cualquier punto

a) $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t$

Desarrollo

Sea $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$

$$\vec{r}'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)$$

$$\vec{r}''(t) = (-2\sin t \cdot e^t, 2\cos t \cdot e^t, e^t)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & e^t \\ e^t(-2 \sin t) & e^t(2 \cos t) & e^t \end{vmatrix}$$

$$= e^{2t}(\sin t - \cos t, -(\cos t + \sin t), 2)$$

$$\vec{r}'''(t) = (-2e^t(\sin t + \cos t), 2e^t(\cos t - \sin t), e^t)$$

$$\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t) = \begin{vmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & e^t \\ -2 \sin t \cdot e^t & 2 \cos t \cdot e^t & e^t \\ -2e^t(\sin t + \cos t) & 2e^t(\cos t - \sin t) & e^t \end{vmatrix}$$

$$= e^{3t} \begin{vmatrix} \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t & 1 \\ -2(\sin t + \cos t) & \cos t - \sin t & 1 \end{vmatrix} = 2e^{3t}$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{3}e^t, \quad |\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \sqrt{6}e^{2t}$$

$$k = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}e^{-t}}{3} ; \quad \tau = \frac{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^2} = \frac{e^{-t}}{3}$$

b) $x = a \cosh t$, $y = a \sinh t$, $z = at$ (helice hiperbolica)

Desarrollo

$$\vec{r}(t) = (a \cosh t, a \sinh t, at) \Rightarrow \vec{r}'(t) = (a \sinh t, a \cosh t, a)$$

$$\vec{r}''(t) = (a \cosh t, a \sinh t, 0), \quad \vec{r}'''(t) = (a \sinh t, a \cosh t, 0)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a \sinh t & a \cosh t & a \\ a \cosh t & a \sinh t & 0 \end{vmatrix} = (-a^2 \sinh t, a^2 \cosh t, -a^2)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{2}a \cosh t, \quad |\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \sqrt{2}a^2 \cosh t$$

$$\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t) = \begin{vmatrix} a \sinh t & a \cosh t & a \\ a \cosh t & a \sinh t & 0 \\ a \sinh t & a \cosh t & 0 \end{vmatrix} = a^3$$

$$k = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}a^2 \cosh t}{2\sqrt{2}a^3 \cosh^3 t} = \frac{1}{2a \cosh^2 t}$$

$$\tau = \frac{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^2} = \frac{a^3}{2a^4 \cosh^2 t} = \frac{1}{2a \cosh^2 t}$$

2109 Hallar los radios vectores de curvatura de flexión y de torsión de las siguientes líneas en un punto arbitrario (x,y,z)

a) $x^2 = 2ay, \quad x^3 = 6a^2z$

Desarrollo

$$C: \begin{cases} x^2 = 2ay \\ x^3 = 6a^2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{2a} \\ z = \frac{x^3}{6a^2} \end{cases}$$

Sea $\vec{r}(t) = (t, \frac{t^2}{2a}, \frac{t^3}{6a^2})$, derivando

$$\vec{r}'(t) = \left(1, \frac{t}{a}, \frac{t^2}{2a^2}\right), \quad \vec{r}''(t) = \left(0, \frac{1}{a}, \frac{t}{a^2}\right), \quad \vec{r}'''(t) = \left(0, 0, \frac{1}{a^2}\right)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{t}{a} & \frac{t^2}{2a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{t}{a^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{t^2}{2a^3}, -\frac{t}{a^2}, \frac{1}{a}\right)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2} + \frac{t^4}{4a^2}} = \frac{t^2 + 2a^2}{2a^2}$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)| = \frac{t^2 + 2a^2}{2a^3}$$

$$R = \frac{|\vec{r}'(t)|^3}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|} = \frac{(t^2 + 2a^2)^2}{4a^3} ; \quad \rho = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))^2}{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t)} = \frac{(t^2 + 2a^2)^2}{4a^3}$$

b) $x^3 = 3p^2y, \quad 2xz = p^2$

Desarrollo

$$C: \begin{cases} x^3 = 3p^2y \\ 2xz = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^3}{3p^2} \\ z = \frac{p^2}{2x} \end{cases}$$

Sea $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{t^3}{3p^2}, \frac{p^2}{2t}\right)$, derivando

$$\vec{r}'(t) = \left(1, \frac{t^2}{p^2}, -\frac{p^2}{2t^2}\right), \quad \vec{r}''(t) = \left(0, \frac{2t}{p^2}, \frac{p^2}{t^3}\right), \quad \vec{r}'''(t) = \left(0, \frac{2}{p^2}, -\frac{3p^2}{t^4}\right)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{1 + \frac{t^4}{p^4} + \frac{p^4}{4t^4}} = \frac{p^4 + 2t^4}{2p^2t^2}$$

$$|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^2 = \frac{(p^4 + 2t^4)^2}{p^4 t^6} \quad ; \quad \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t) = \frac{8}{t^3}$$

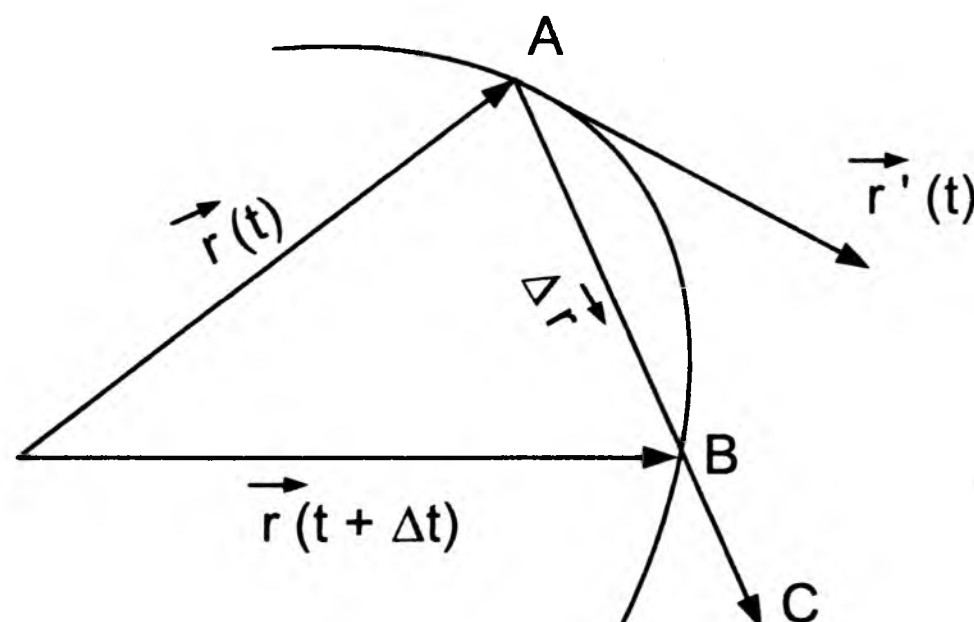
$$R = \frac{|\vec{r}'(t)|^3}{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t)} = \frac{(p^4 + 2t^4)^2}{8p^4 t^3}$$

$$\rho = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))^2}{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t)} = \frac{(p^4 + 2t^4)^2}{8p^4 t^3}$$

- 2110** Demostrar, que los componentes tangencial y normal del vector de aceleración \vec{w} se expresan por las formular $w_\tau = \frac{dV}{dt} \tau$, $v_N = \frac{V^2}{R} \nu$, donde V es la velocidad, R radio de curvatura de flexión de la trayectoria, τ , ν los vectores unitarios de la tangente y la normal principal a la curva.

Desarrollo

Consideremos el gráfico siguiente:



Si en un instante t , un punto móvil se encuentra en A, determinado por el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{r}(t)$ de acuerdo a la figura y en otro instante $t + \Delta t$ se encuentra en el punto B determinado por el vector $\overrightarrow{OB} = \vec{r}(t + \Delta t)$.

Luego el vector \overrightarrow{AB} se denomina vector desplazamiento del punto A, la razón del vector desplazamiento \overrightarrow{AB} con respecto al incremento correspondiente al tiempo t se denomina velocidad media durante un tiempo.

$$\vec{V}_{med} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \overrightarrow{AC}$$

La velocidad del punto en un instante dado se determina por:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{med} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ es decir: } \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ahora tomemos la longitud s del arco, al cual a s consideremos como función del tiempo t . Luego tenemos $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \tau v$ donde $\tau = \frac{d\vec{r}}{ds}$ es un vector unitario de la tangente y $v = \frac{ds}{dt}$ es el vector velocidad.

La aceleración w de un punto es $w = \frac{dv}{dt}$

Como $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow w = \frac{d^2s}{dt^2}$ como $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \tau v$ además

$$w = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau, v) = \tau \frac{dV}{dt} + V \frac{d\tau}{dt} \text{ pero } \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \text{ entonces se tiene:}$$

$$w = \tau \frac{dV}{dt} + V \frac{d\tau}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \tau \frac{dV}{dt} + V^2 \frac{d\tau}{ds}$$

$$w = \tau \frac{dV}{dt} + \frac{vV^2}{R} \quad \text{pero} \quad w = w_\tau + w_v$$

$$\text{Luego } w_\tau + w_v = \tau \frac{dV}{dt} + \frac{V^2}{R} v \quad \text{entonces } w_\tau = \tau \frac{dv}{dt}, \quad w_v = \frac{V^2}{R} v$$

- 2111** Por la hélice circular $\vec{R}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ se mueve uniformemente un punto con velocidad v . Calcular su aceleración w .

Desarrollo

$$\text{Como } \vec{R}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \text{ derivando } \frac{d\vec{R}}{dt} = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = (-a \cos t, -a \sin t, 0) \quad ; \quad \frac{d^3 \vec{R}}{dt^3} = (a \sin t, -a \cos t, 0)$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2)$$

$$\text{como } w_v = \frac{V^2}{R} v \quad \text{pero} \quad \frac{1}{R} = \frac{\left| \frac{d\vec{R}}{dt} \times \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right|}{\left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\text{Luego } w_v = \frac{aV^2}{a^2 + b^2} v$$

2112 La ecuación de un movimiento es $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ determinar en los instantes $t = 0, t = 1$.

- 1) La curvatura de flexión y de la trayectoria.
- 2) Los componentes tangenciales y normal del vector de aceleración del movimiento.

Desarrollo

Como $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, derivando se tiene:

$$\vec{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2), \quad \vec{r}''(t) = (0, 2, 6t), \quad \vec{r}'''(t) = (0, 0, 6)$$

para $t = 0$, $\vec{r}'(0) = (1, 0, 0)$, $\vec{r}''(0) = (0, 2, 0)$, $\vec{r}'''(0) = (0, 0, 6)$

$$\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2) \Rightarrow |\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)| = 2 \Rightarrow |\vec{r}'(0)| = 1$$

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)|}{|\vec{r}'(0)|^3} = \frac{2}{1} = 2$$

componente tangencial $w_\tau = ?$ y la normal $w_\nu = ?$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 2t, 3t^2) \text{ pero } V = |\vec{V}| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\text{entonces } w = \frac{dV}{dt} = \frac{4t + 18t^3}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

para $t = 0$ se tiene $w = \frac{dV}{dt} = 0$. Luego $w_\tau = 0$, $w_\nu = 0$

CAPITULO VII

INTEGRALES MÚLTIPLES Y CURVILÍNEAS

7.1. INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS RECTANGULARES.-

1ro. CÁLCULO INMEDIATO DE INTEGRALES DOBLES.-

Se llama integral doble de una función continua $f(x,y)$ sobre un recinto cerrado y acotado S del plano XOY al limite de la suma integral doble correspondiente.

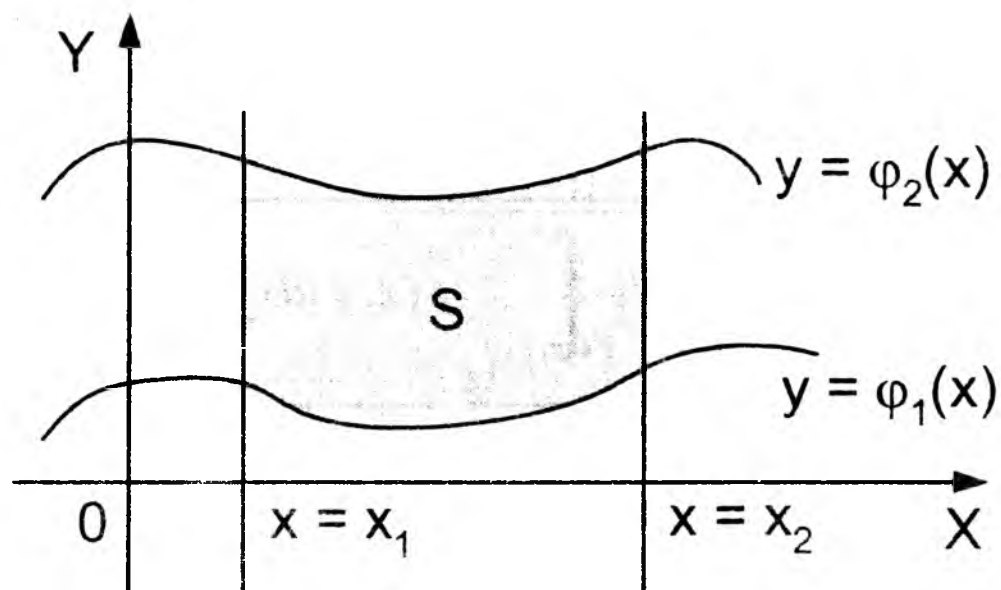
$$\iint_S f(x,y) dx dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_k \rightarrow 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k) \Delta x_i \Delta y_k \quad \dots (1)$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ y la suma se extiende a aquellos valores de i y k , para los que los puntos (x_i, y_k) pertenecen al recinto S .

2do. COLOCACIÓN DE LOS LIMITES DE INTEGRACIÓN DE LA INTEGRAL DOBLE.-

Se consideran dos formas principales de recinto de integración.

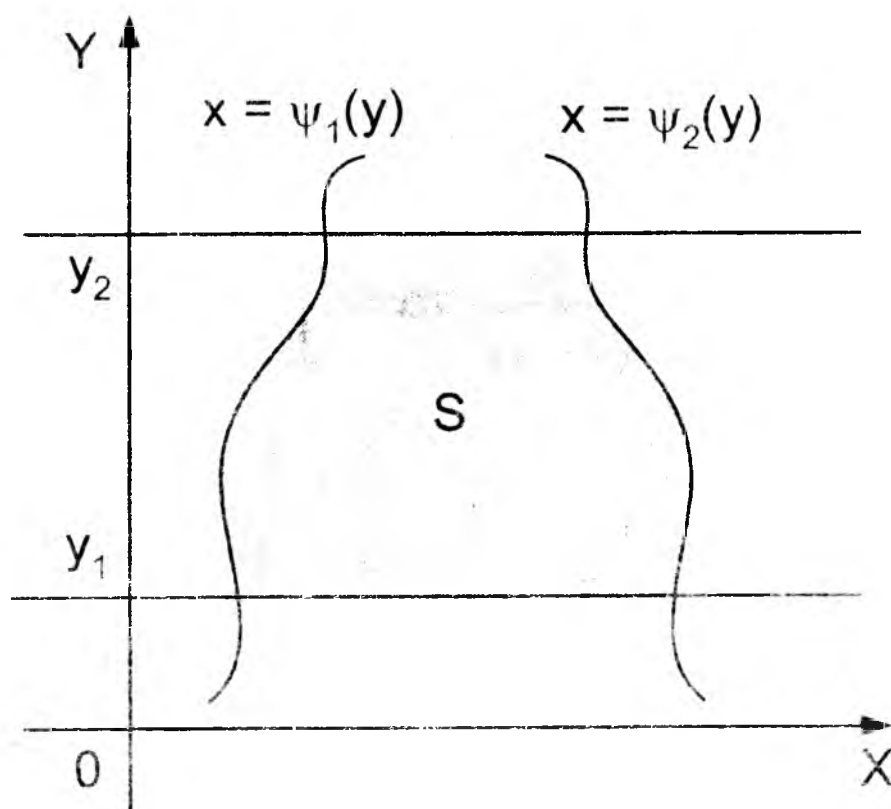
- ① El recinto de integración S , está limitado a izquierda y derecha por las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$ ($x_2 > x_1$), mientras que por abajo y por arriba lo está por las curvas continuas $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$)



Luego la integral doble se puede realizar reduciéndola a una integral reiterada de la forma.

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

- ② El recinto de integración S , está limitado por abajo y por arriba por las rectas $y_1 = y$ e $y_2 = y$ ($y_2 > y_1$) mientras que por la izquierda y por la derecha lo está por las curvas continuas $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ ($\psi_2(y) \geq \psi_1(y)$)



Luego la integral doble se puede realizar reduciéndola a una integral reiterada de la forma.

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dx \right) dy$$

Calcular las siguientes integrales reiteradas.

2113 $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_0^2 dy \left(\int_0^1 (x^2 + 2y) dx \right) &= \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2 + 2y) dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2xy \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y \right) dy = \left(\frac{y}{3} + \frac{2y^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

2114 $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} &= \int_3^4 \left(\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx = \int_3^4 \left(-\frac{1}{x+y} \right) \Big|_1^2 dx \\ &= - \int_3^4 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = - \left[\ln |x+2| - \ln |x+1| \right] \Big|_3^4 \\ &= - \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| \Big|_3^4 = - \left(\ln \frac{6}{5} - \ln \frac{5}{4} \right) = \ln \frac{25}{24} \end{aligned}$$

$$2115 \quad \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \arctg y \Big|_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{4} x^2 dx = \frac{\pi x^3}{12} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

$$2116 \quad \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 \frac{x^2 dy}{y^2}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 \frac{x^2 dy}{y^2} &= \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^2 \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \int_1^2 -\frac{x^2}{y} \Big|_{\frac{1}{x}}^2 dx = - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 \right) dx \\ &= - \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 = - \left[\frac{4}{3} - 4 \right] - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) = - \left[-\frac{8}{3} + \frac{1}{12} \right] = \frac{31}{12} \end{aligned}$$

$$2117 \quad \int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx$$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx &= \int_{-3}^3 \left(\int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx \right) dy = \int_{-3}^3 \left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right) \Big|_{y^2-4}^5 dy \\ &= \int_{-3}^3 \left[\frac{25}{2} + 10y - \frac{(y^2-4)^2}{2} - 2y(y^2-4) \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (-y^4 - 4y^3 + 8y^2 + 36y + 9) dy \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{y^5}{5} - y^4 + \frac{8}{3}y^3 + 18y^2 + 9y \right) \Big|_{-3}^3 \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{243}{5} - 81 + 72 + 162 + 27 \right) - \left(\frac{243}{5} - 81 - 72 + 162 - 27 \right) \right] = 50.4
\end{aligned}$$

2118 $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \operatorname{sen} \varphi}^a r dr$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \operatorname{sen} \varphi}^a r dr &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{a \operatorname{sen} \varphi}^a r dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_{a \operatorname{sen} \varphi}^a d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \\
&= \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{4} \left[\varphi + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2} \right] \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{a^2}{4} (2\pi + 0 - 0) = \frac{a^2 \pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \operatorname{sen} \varphi}^a r dr = \frac{a^2 \pi}{2}$$

2119 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3 \cos \varphi} r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi dr$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi dr &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{3\cos\varphi} r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi dr \right) d\varphi \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \operatorname{sen}^2 \varphi \Big|_0^{3\cos\varphi} d\varphi = \frac{27}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{27}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{27}{3} \left(\frac{\operatorname{sen}^3 \varphi}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 \varphi}{5} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{27}{3} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \right] = \frac{27}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = 18 \left(\frac{5-3}{15} \right) = \frac{12}{5} = 2.4
 \end{aligned}$$

2120 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} \sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{1-x^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \int_0^1 \left[\left(0 + \frac{1-x^2}{2} \operatorname{arcsen} 1 \right) - 0 \right] dx = \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

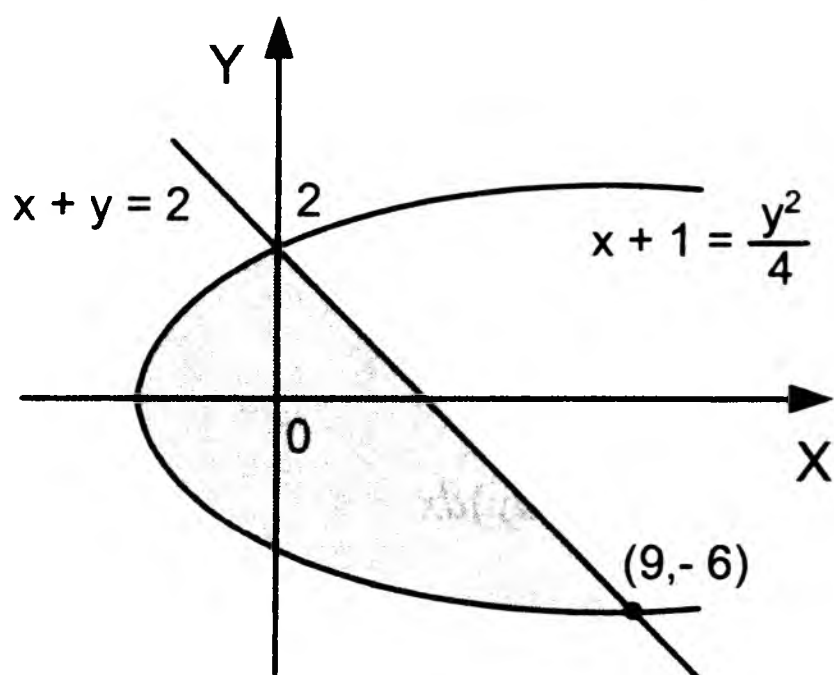
Escribir las ecuaciones de las líneas que limitan los recintos a que se extienden las integrales dobles que se indican más abajo y dibujar estos recintos.

2121 $\int_{-6}^2 dy \cdot \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx$

Desarrollo

$$\int_{-6}^2 dy \cdot \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx = \int_{-6}^2 \left(\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dy \right) dx = \iint_D f(x, y) dx dy$$

donde $D: \begin{cases} -6 \leq y \leq 2 \\ \frac{y^2}{4} - 1 \leq x \leq 2 - y \end{cases}$



graficando la región D se tiene:

Los límites de integración es de

$y = 6$ a $y = 2$

De $x = \frac{y^2}{4} - 1$ a $x = 2 - y$

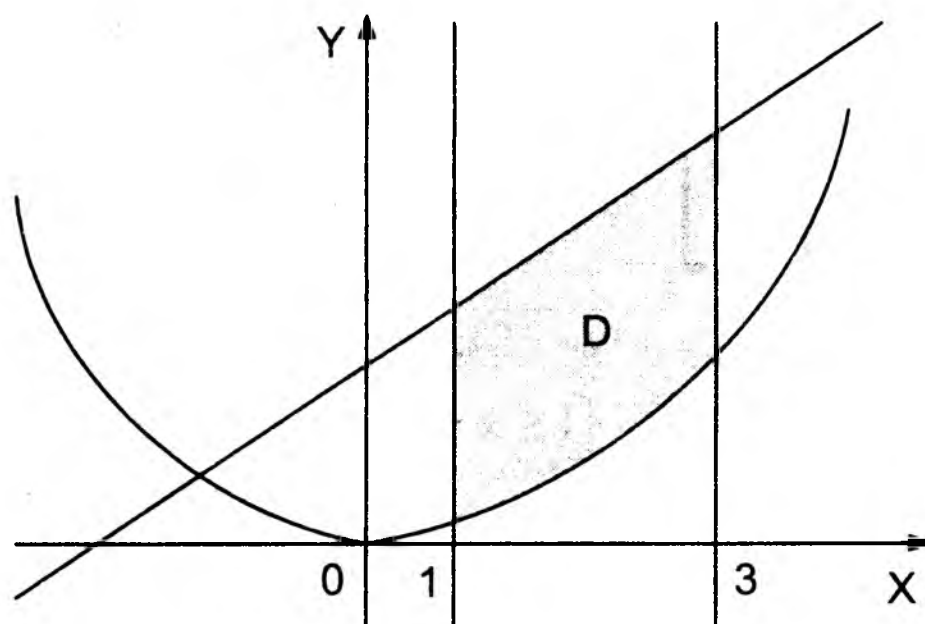
2122 $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy$

Desarrollo

$$\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy = \int_1^3 \left(\int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy \right) dx = \iint_D f(x, y) dx dy$$

donde $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 \leq y \leq x+9 \end{cases}$

graficando la región

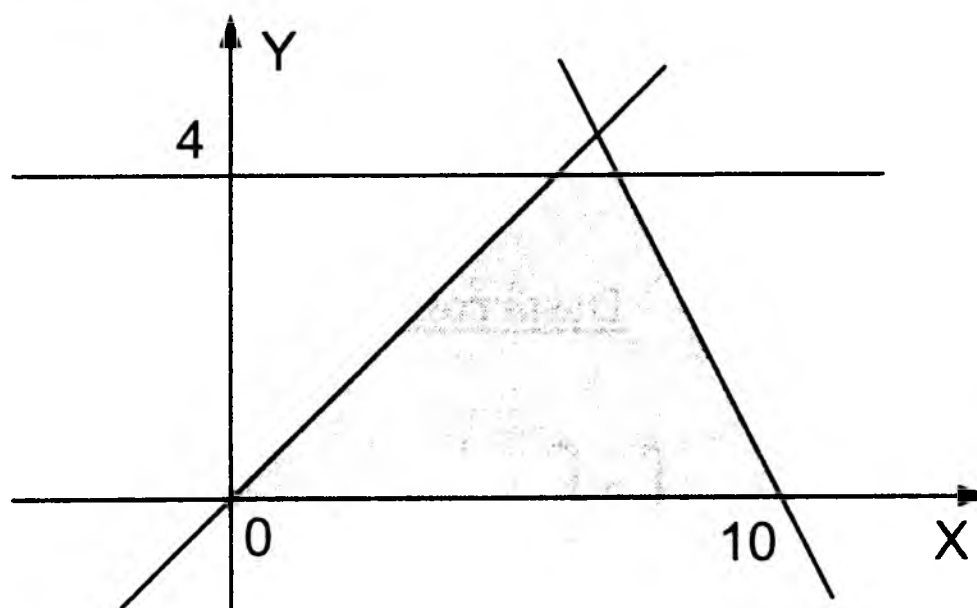


2123 $\int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x, y) dx$

Desarrollo

$$\int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x, y) dx = \int_0^4 \left(\int_y^{10-y} f(x, y) dx \right) dy = \iint_D f(x, y) dx dy$$

donde $D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ y \leq x \leq 10-y \end{cases}$, graficando la región se tiene:



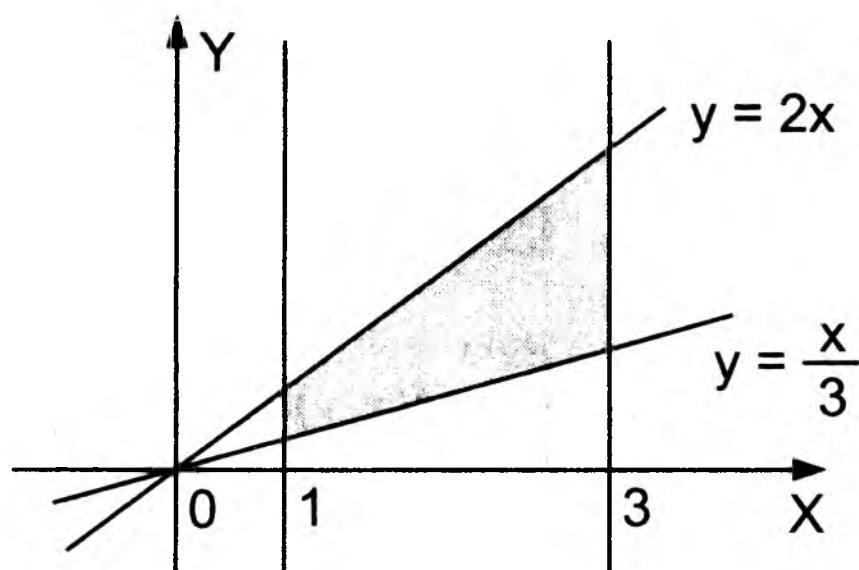
Los limites de integración es de $y = 0$ hasta $y = 4$, de $x = y$ a $x = 10 - y$

2124 $\int_1^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y) dy$

Desarrollo

$$\int_1^3 dx \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y) dy = \int_1^3 \left(\int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y) dy \right) dx = \iint_D f(x, y) dx dy$$

donde $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{x}{3} \leq y \leq 2x \end{cases}$, graficando la región se tiene:



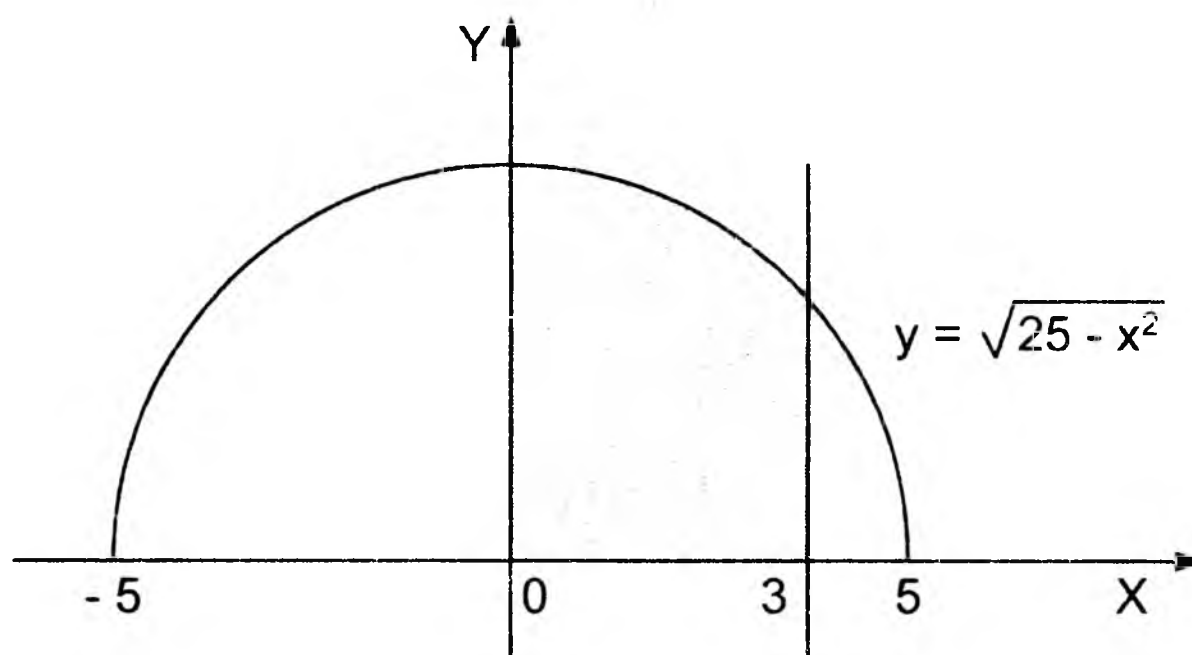
Los límites de integración de $x = 1$ a $x = 3$ de $y = \frac{x}{3}$ a $y = 2x$

2125 $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy$

Desarrollo

$$\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy \right) dx = \iint_D f(x, y) dx dy$$

donde $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \end{cases}$, graficando se tiene:



Los limites de integración es de $x = 0$ a $x = 3$ de $y = 0$ a $y = \sqrt{25 - x^2}$

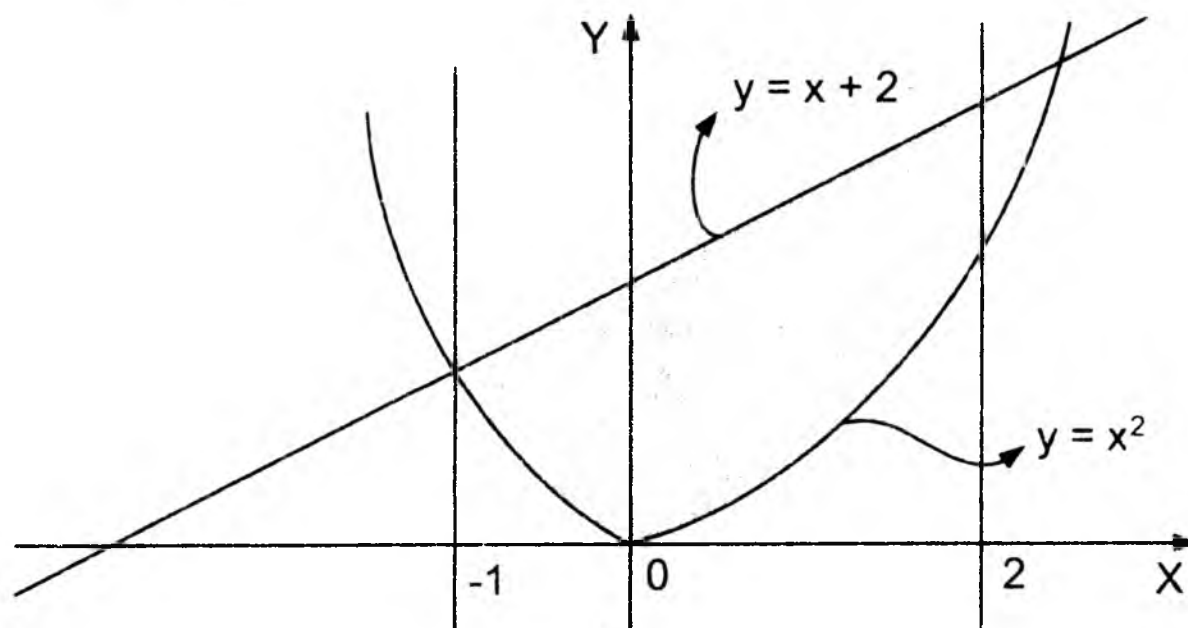
2126

$$\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy$$

Desarrollo

$$\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy = \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy \right) dx = \iint_D f(x, y) dx dy$$

donde $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq x+2 \end{cases}$, graficando se tiene:



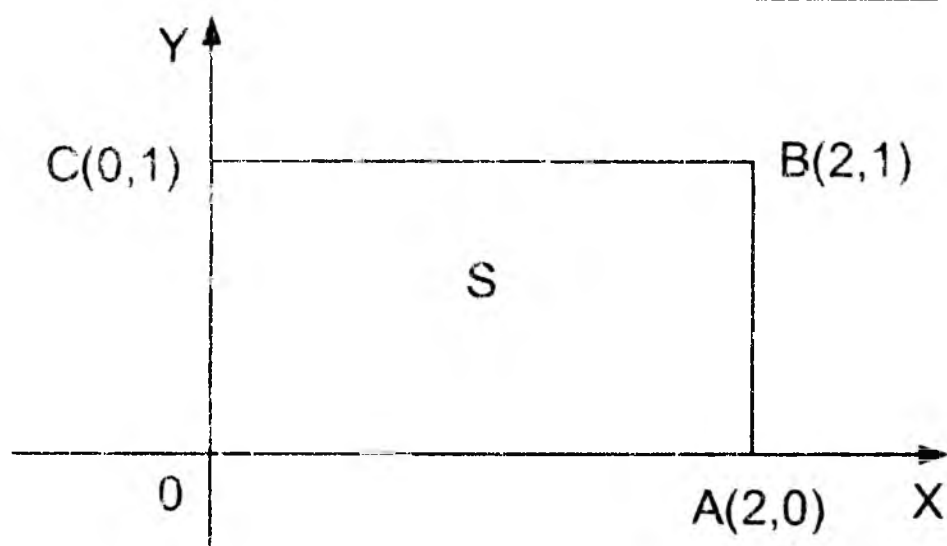
Los limites de integración es de $x = -1$ a $x = 2$ de $y = x^2$ a $y = x + 2$

Colocar los límites de integración, en uno y otro orden, la integral doble

$$\iint_S f(x, y) dx dy \text{ para los recintos } S \text{ cuya continuación se indican}$$

- 2127 S es un rectángulo cuyos vértices son: O(0,0), A(2,0), B(2,1) y C(0,1).

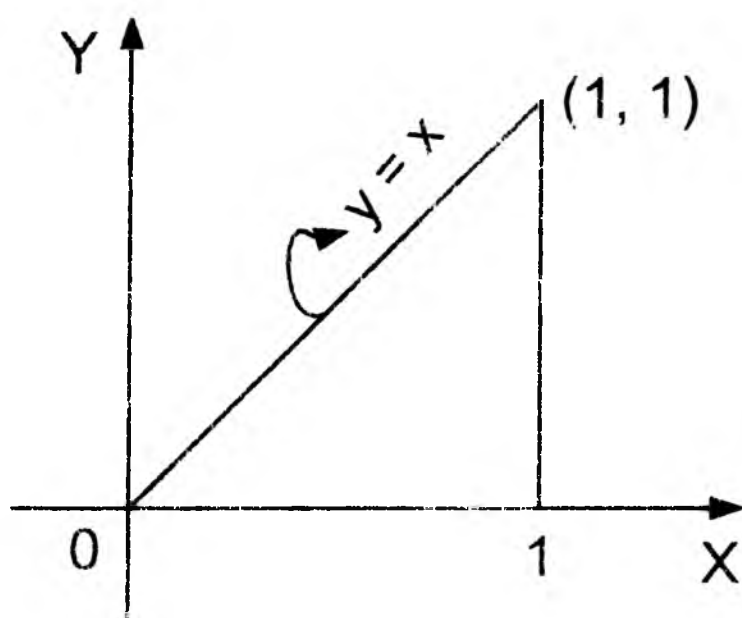
Desarrollo



$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

- 2128 S es un triángulo cuyos vértices son O(0,0), A(1,0) y B(1,1).

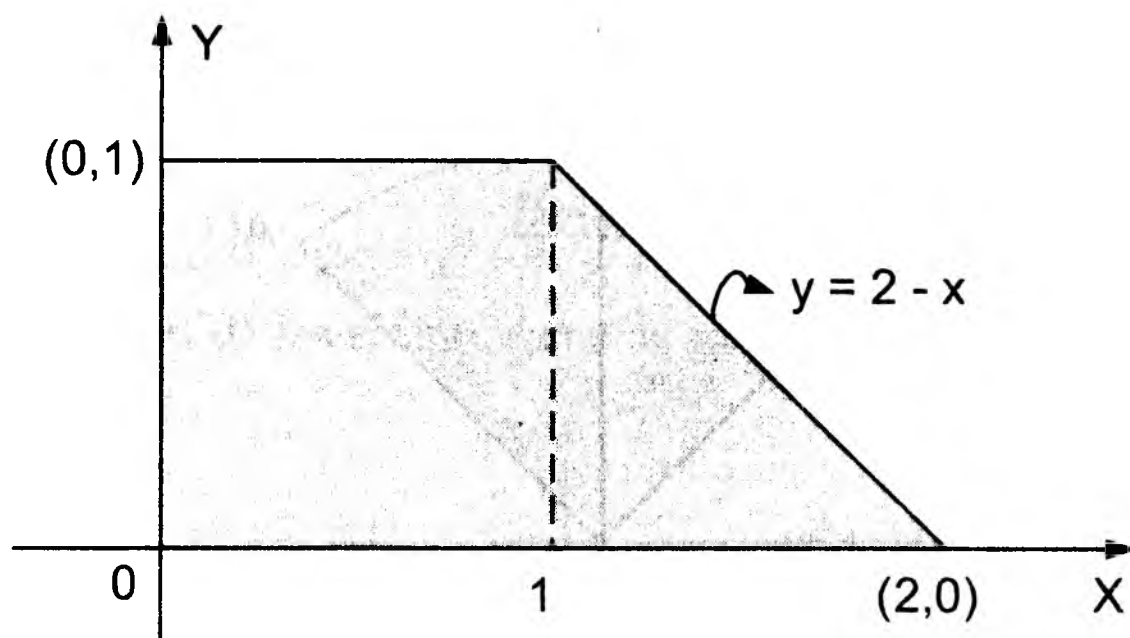
Desarrollo



$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

- 2129 S es un trapecio cuyos vértices son O(0,0), A(2,0), B(1,1) y C(0,1)

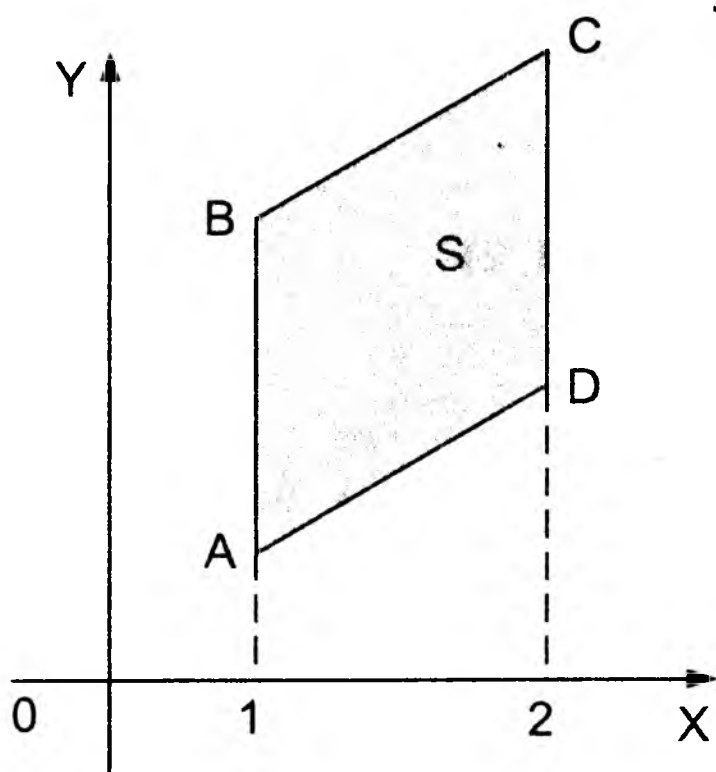
Desarrollo



$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-y} f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

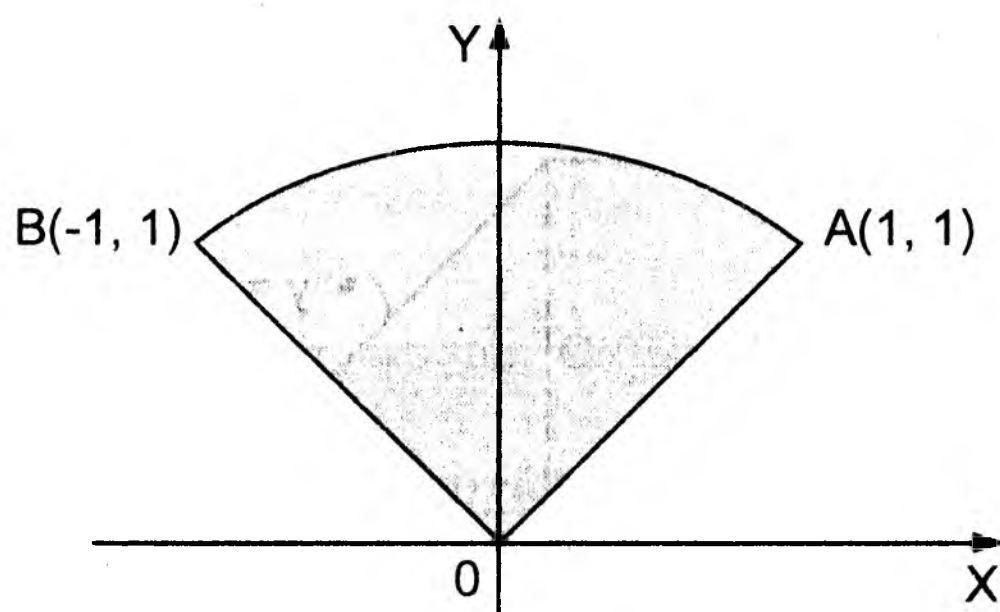
2130 S es el paralelogramo cuyos vértices son A(1,2), B(2,4)

Desarrollo



$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_1^2 \left(\int_{2x}^{2x+3} f(x, y) dy \right) dx$$

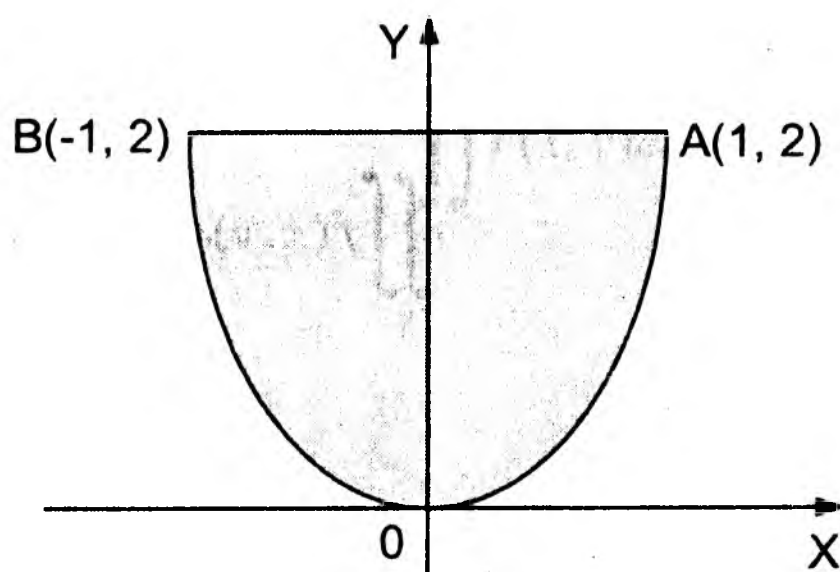
2131 S es un sector circular OAB con centro en el punto O(0,0) cuyo arco tiene sus extremos en A(1,1) y B(1,-1).



Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx \\ = \int_{-1}^0 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy \end{aligned}$$

- 2132** S es un segmento parabólico recto AOB, limitado por la parábola BOA y por el segmento de recta BA, que une entre sí los puntos B(-1,2) y A(1,2)



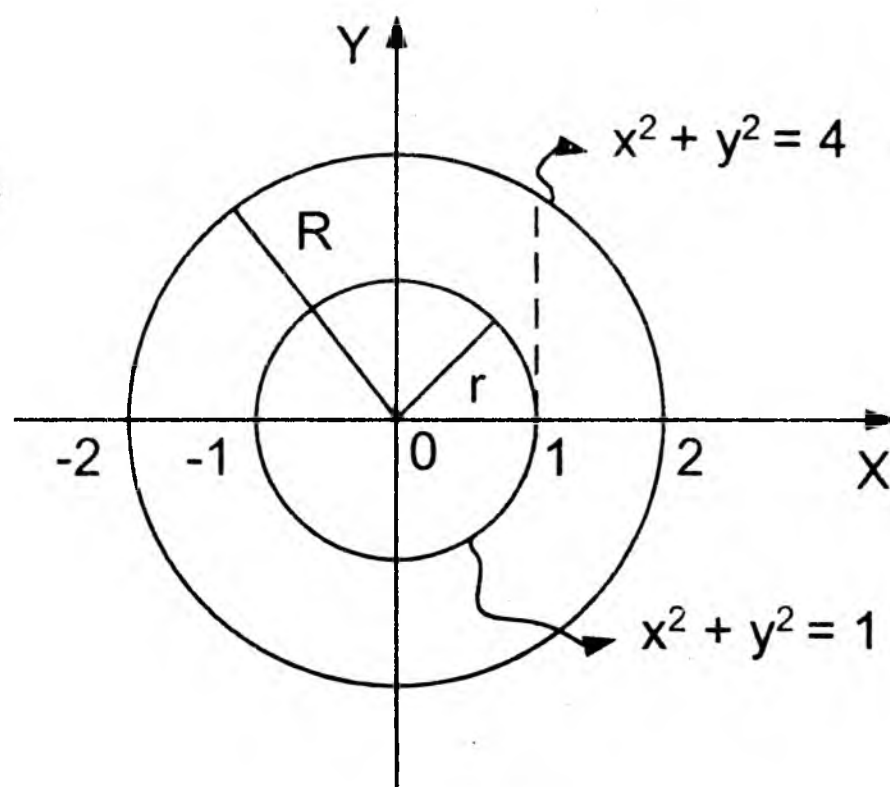
Desarrollo

$$\int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^2 f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x, y) dx$$

- 2133 S es un anillo circular limitado por las circunferencias cuyos radios son $r = 1$ y $R = 2$ y cuyo centro común está situado en el punto $O(0,0)$.

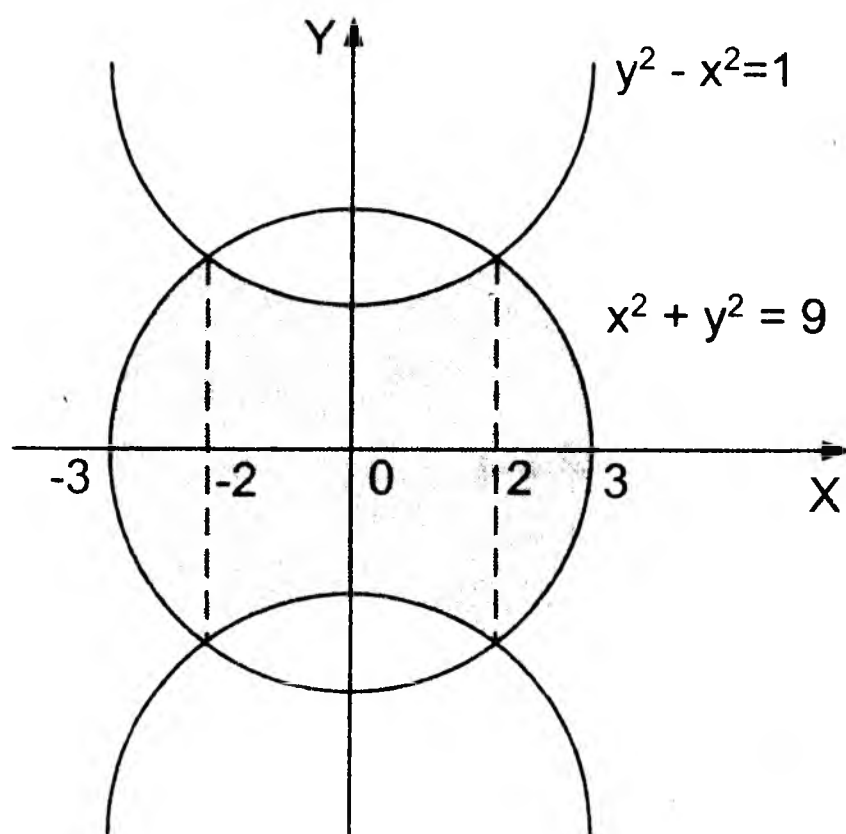
Desarrollo

Las ecuaciones de las circunferencias son: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$



$$\begin{aligned}
 & \int_{-2}^{-1} dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dx + \\
 & \quad + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_{1}^2 dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy \\
 & = \int_{-2}^{-1} dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \\
 & \quad + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx + \int_{1}^2 dy \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx
 \end{aligned}$$

- 2134 S está limitado por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (se considera el recinto que comprende el origen de coordenadas).

Desarrollo

Calculando los puntos de intersección se tiene:

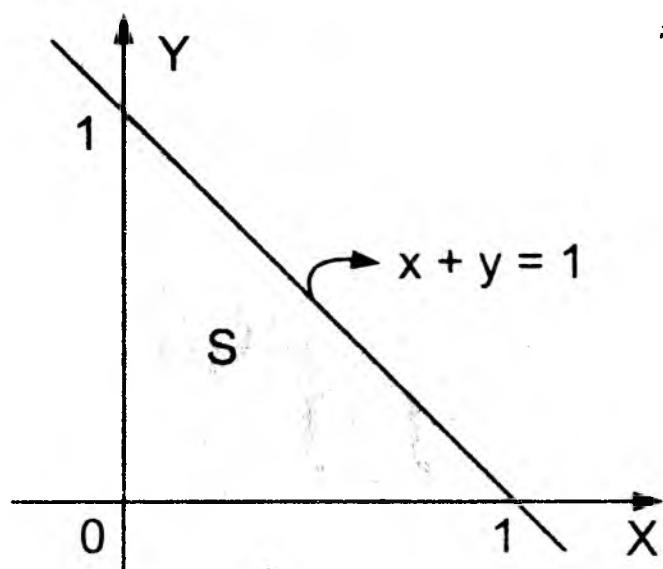
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^{-2} dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-2}^2 dx \int_{\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy = \\ &= \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{y^2-1}} f(x, y) dx + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx + \\ &+ \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{y^2-1}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx \\ &+ \int_1^{\sqrt{5}} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx \end{aligned}$$

2135 Colocar los límites de integración en la integral doble $\iint_S f(x, y) dx dy$ si el recinto S está determinado por las desigualdades siguientes:

a) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$

Desarrollo

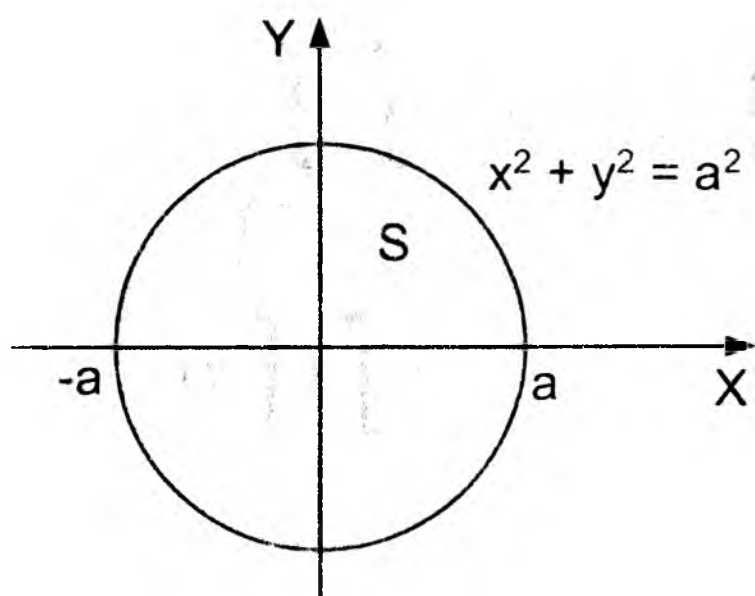


$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x, y) dx \right) dy$$

b) $x^2 + y^2 \leq a^2$

Desarrollo



$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_{-a}^a \left(\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

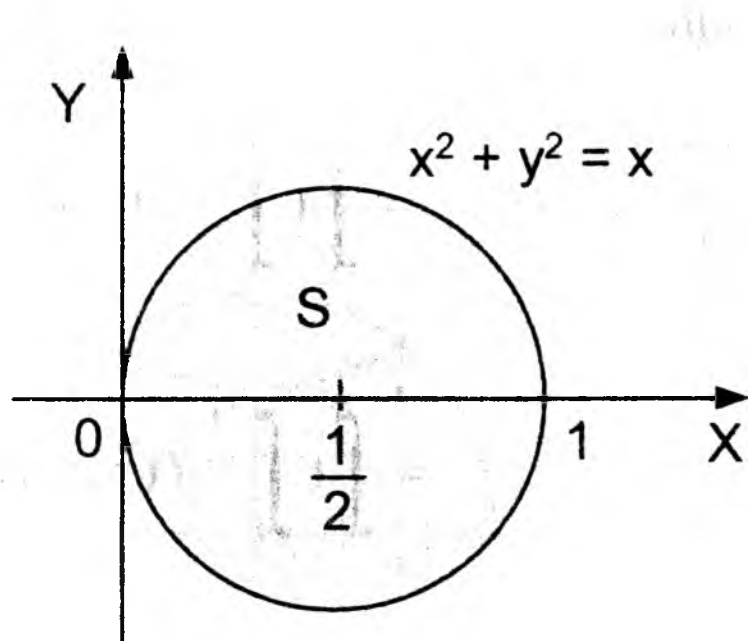
$$= \int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

c) $x^2 + y^2 \leq x$

Desarrollo

$$x^2 + y^2 = x \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ circunferencia de centro } \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$x^2 + y^2 = x \Rightarrow \begin{cases} y = \pm \sqrt{x - x^2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2} \end{cases}$$

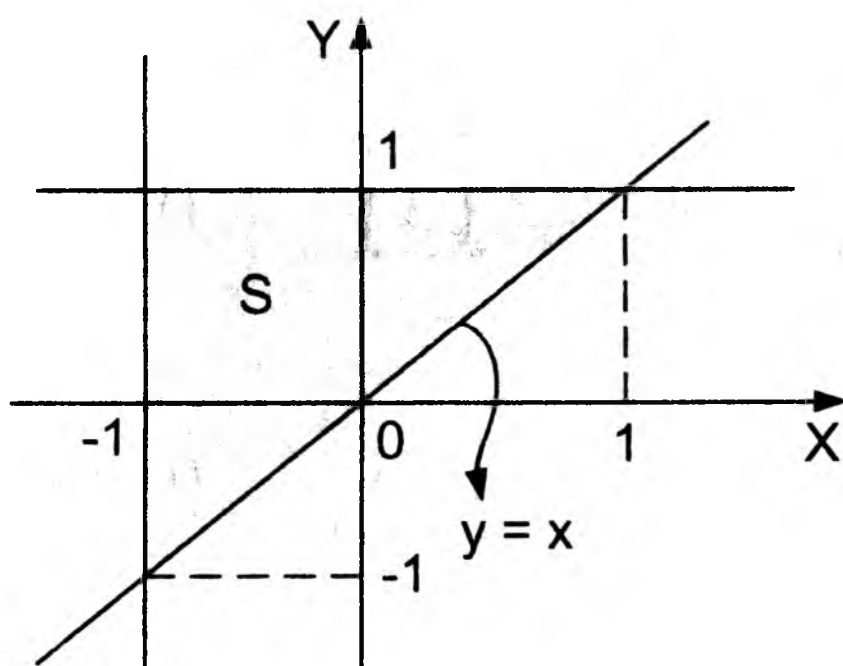


$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x, y) dx \right) dy$$

d) $y \geq x, x \geq 1, y \leq 1$

Desarrollo



$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_x^1 f(x, y) dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^y f(x, y) dx \right) dy$$

e) $y \leq x \leq y \leq 2a$

Desarrollo

$$\int_0^a dy \int_y^{y+2a} f(x, y) dx =$$

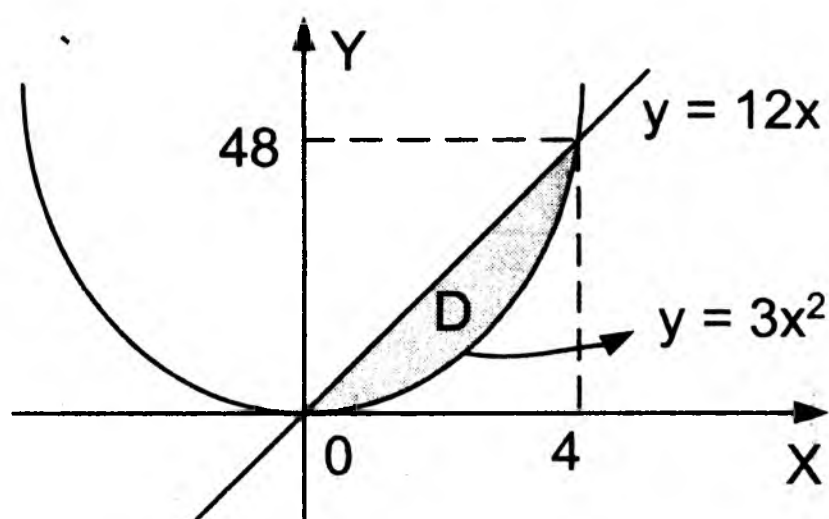
$$= \int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_0^a f(x, y) dy + \int_{2a}^{3a} dx \int_{x-2a}^a f(x, y) dy$$

Investigar el orden de integración en las siguientes integrales dobles.

2136 $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 3x^2 \leq y \leq 12x \end{cases}$ graficando la región

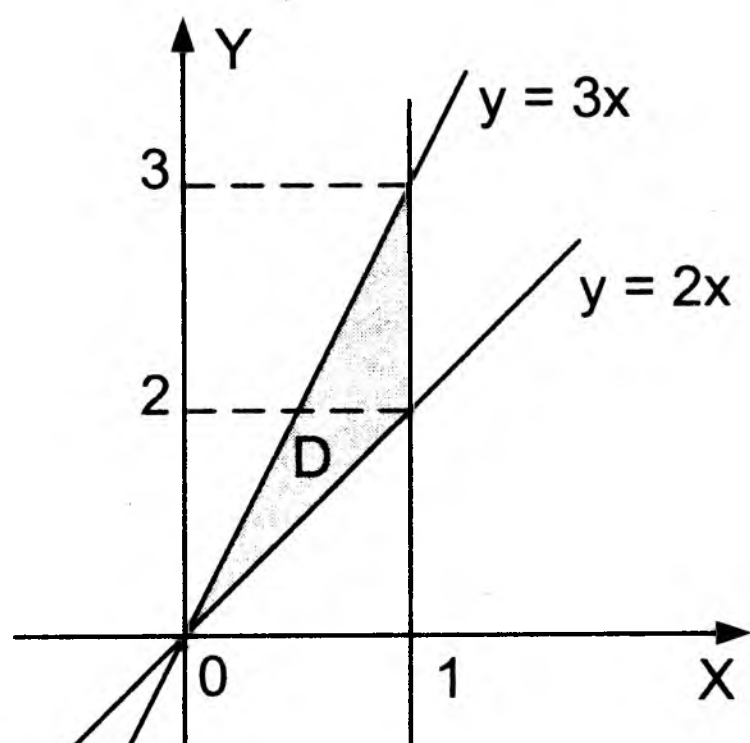


$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy \\ &= \int_0^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y) dx \end{aligned}$$

2137 $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq 3x \end{cases}$ graficando la región

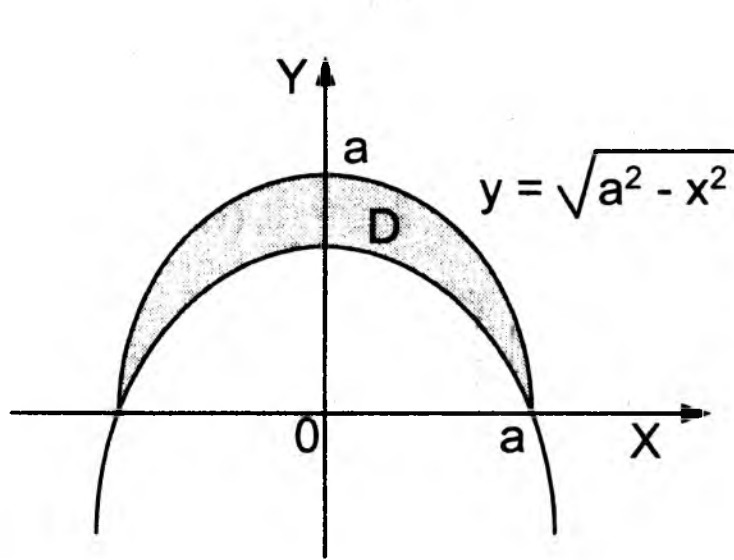


$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{2x}^{3x} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_{\frac{y}{3}}^1 f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

$$2138 \quad \int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ \frac{a^2-x^2}{2a} \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$, graficando



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^a \left(\int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx \right) dy + \int_{\frac{a}{2}}^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx \right) dy$$

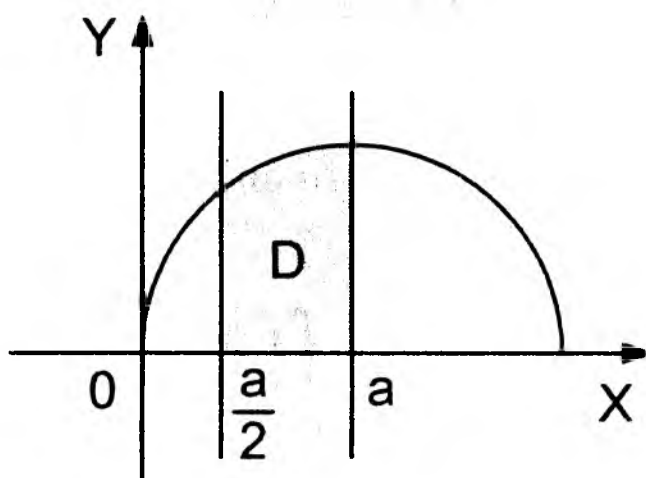
$$2139 \quad \int_{\frac{a}{2}}^a dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy$$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} \frac{a}{2} \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2ax-x^2} \end{cases}$ graficando

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{a}{2}}^a \left(\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(\int_{\frac{a}{2}}^a f(x, y) dx \right) dy + \int_{\frac{\sqrt{3}a}{2}}^a \left(\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^a f(x, y) dx \right) dy$$

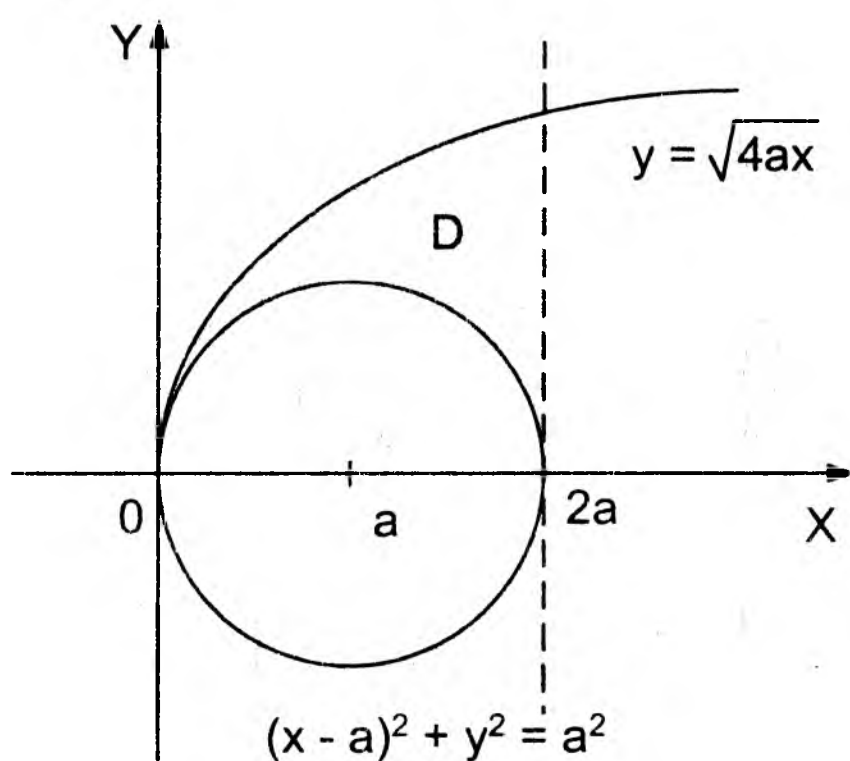


2140
$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y) dy$$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2a \\ \sqrt{2ax-x^2} \leq y \leq \sqrt{4ax} \end{cases}$, graficando

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y) dy \right) dx$$

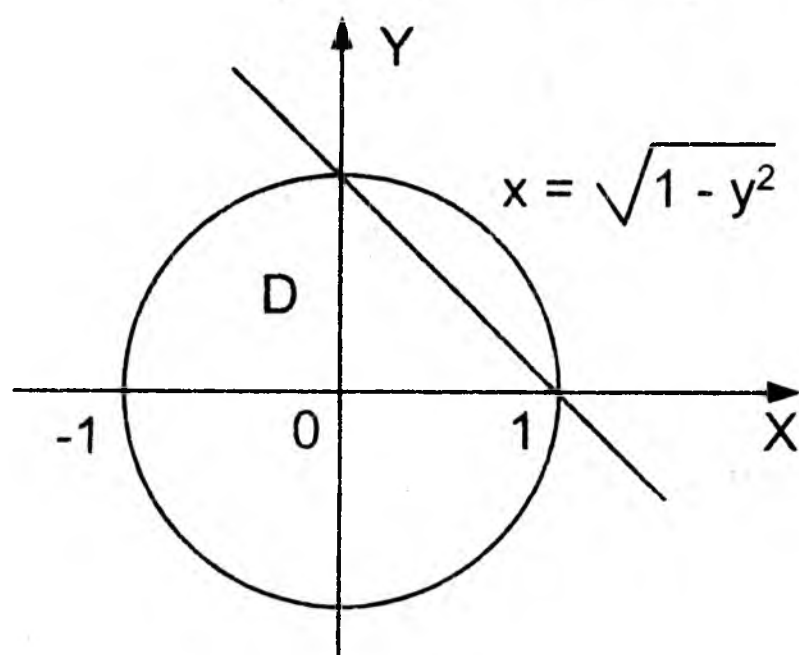


$$\begin{aligned} &= \int_0^a \left(\int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx \right) dy \\ &+ \int_0^a \left(\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y) dx \right) dy + \\ &+ \int_0^{2\sqrt{2a}} \left(\int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x,y) dx \right) dy \end{aligned}$$

2141
$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx$$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y \end{cases}$, graficando



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx \right) dy$$

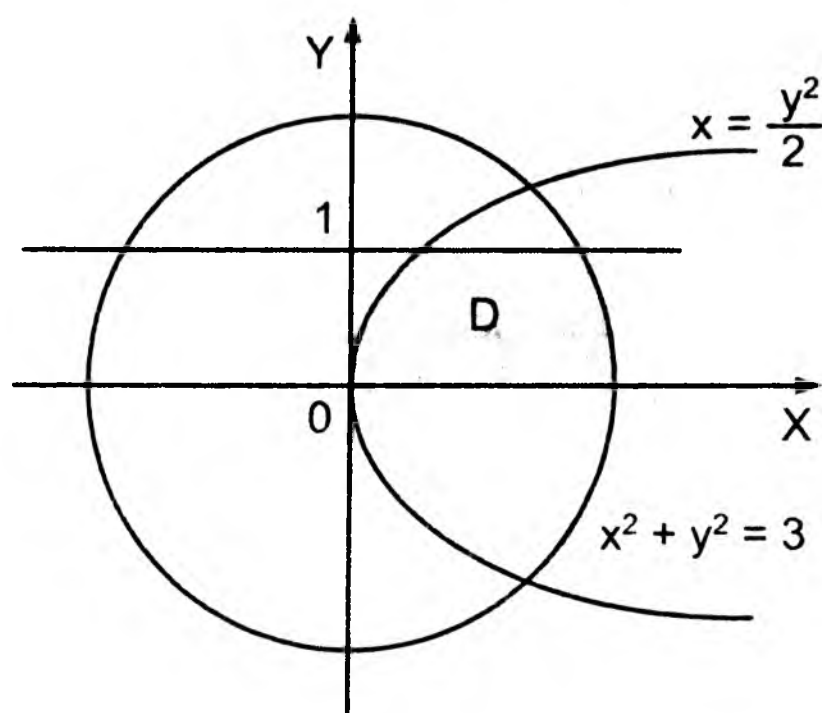
$$= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

$$+ \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) dy \right) dx$$

2142 $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{y^2}{2} \leq x \leq \sqrt{3-y^2} \end{cases}$, graficando



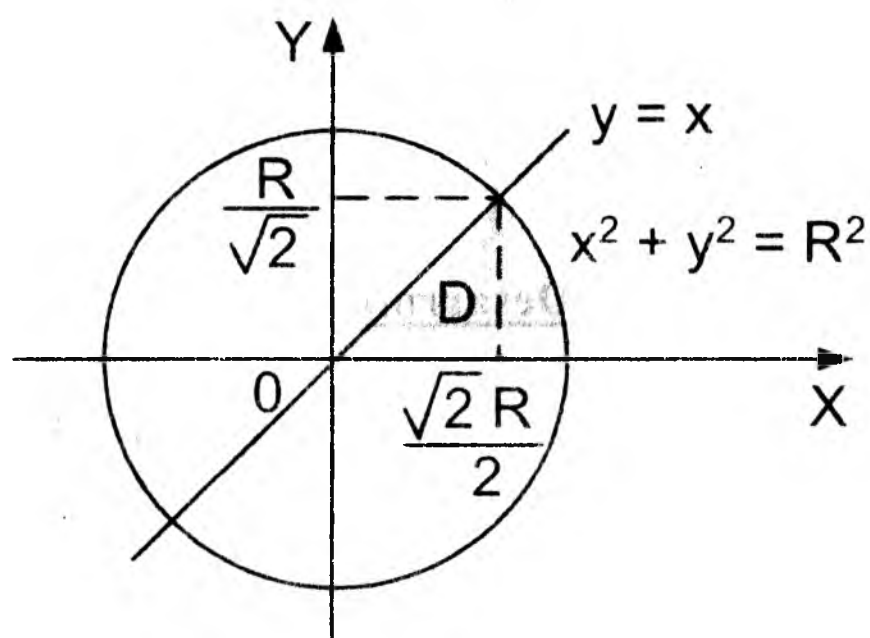
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

$$2143 \quad \int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{\sqrt{2}R}{2}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy$$

Desarrollo

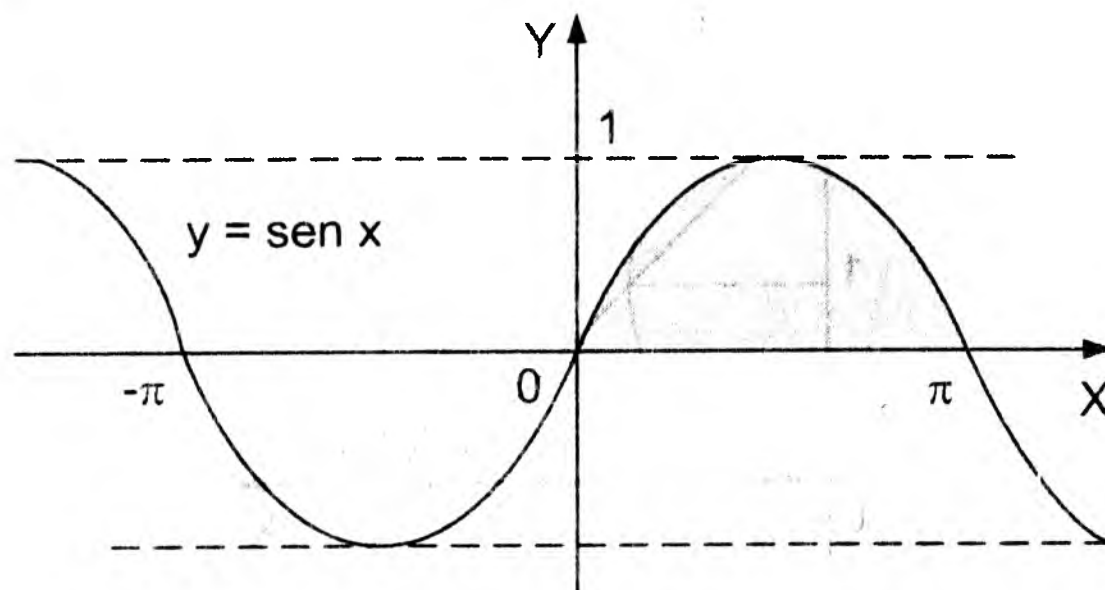


$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{\sqrt{2}R}{2}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}} dy \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y) dx$$

$$2144 \quad \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin x \end{cases}$, graficando

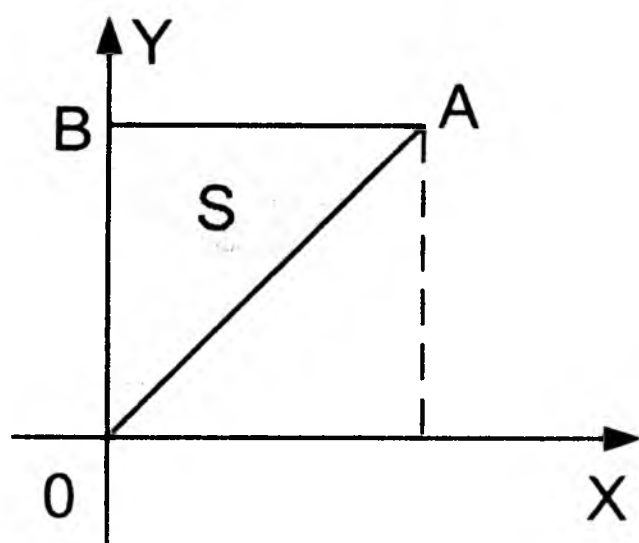


$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsen y}^{\pi - \arcsen y} f(x, y) dx$$

Calcular las siguientes integrales dobles.

2145 $\iint_S x dx dy$, donde S es un triángulo cuyos vértices son O(0,0), A(1,1) y B(0,1)

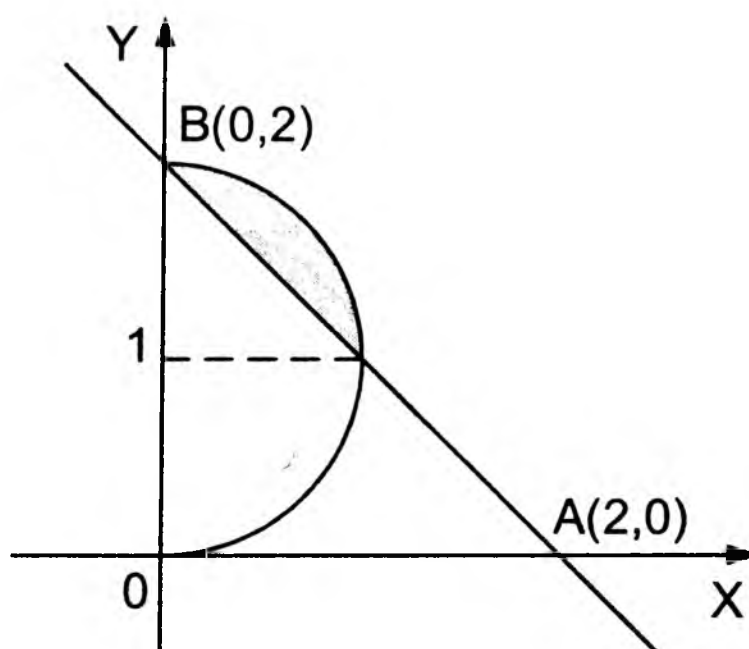
Desarrollo



$$\begin{aligned} \iint_S x dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^y x dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Big|_0^y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 dy \\ &= \frac{y^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2146 $\iint_S x dx dy$, donde el recinto de integración S está limitado por la recta que

pasa por los puntos A(2,0) y B(0,2) y por el arco de circunferencia de radio 1 que tiene su centro en el punto (0,1).



Desarrollo

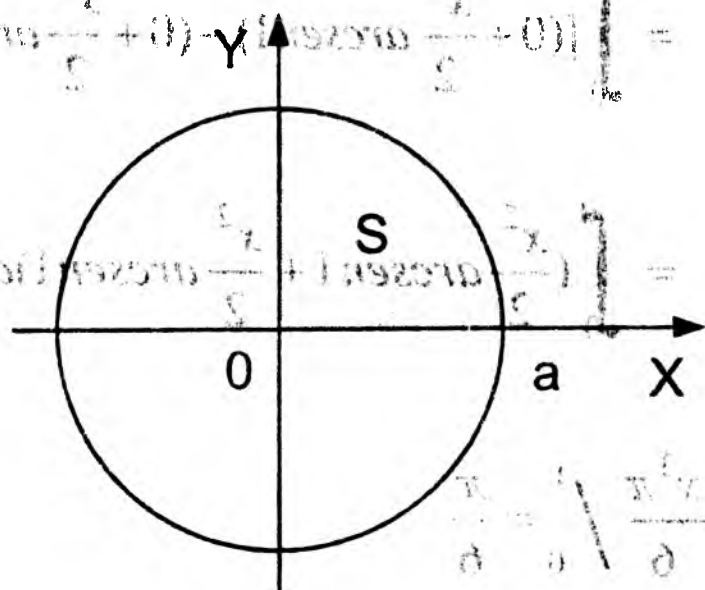
La ecuación de la circunferencia es $x^2 + (y-1)^2 = 1$ de donde $x = \sqrt{2y - y^2}$

La ecuación de la recta es $x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y$

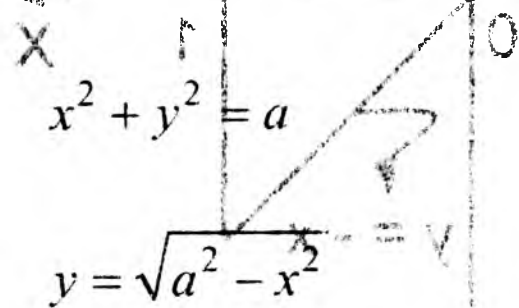
$$\begin{aligned} \iint_S x \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} x \, dx \right) dy = \int_1^2 \frac{x^2}{2} \Big|_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 [2y - y^2 - (2-y)^2] dy = \frac{1}{2} \int_1^2 (6y - 4 - 2y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(3y^2 - \frac{2y^3}{3} - 4y \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left[\left(12 - \frac{16}{3} - 8 \right) - \left(3 - \frac{2}{3} - 4 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[5 - \frac{14}{3} \right] = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2147 $\iint_S \frac{dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, donde S es la parte del círculo de radio a, con centro en el punto O(0,0) situado en el primer cuadrante.

Desarrollo



La ecuación de la circunferencia es



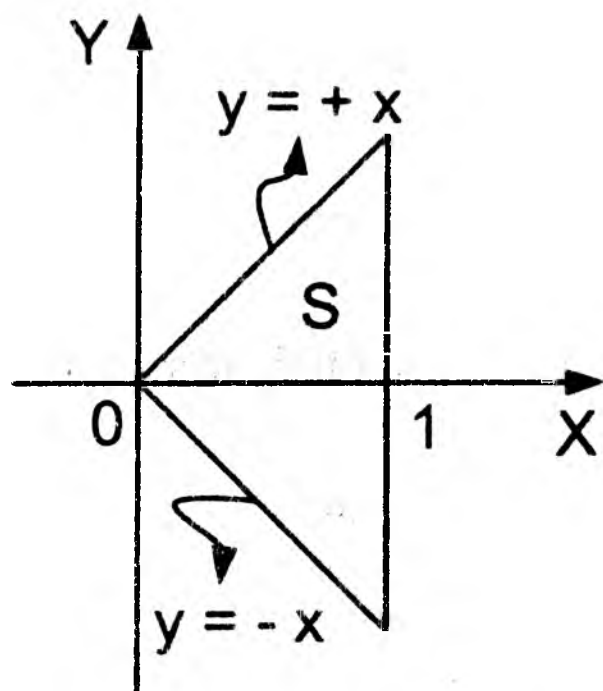
$$S: \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} &= \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right) dx \\
 &= \int_0^a \arcsen \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \bigg|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int_0^a (\arcsen 1 - \arcsen 0) dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^a dx = \frac{\pi x}{2} \bigg|_0^a = \frac{\pi a}{2}
 \end{aligned}$$

- 2148 $\iint_S \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$, donde S es un triángulo con los vértices en los puntos $O(0,0)$, $A(1,-1)$ y $B(1,1)$.

Desarrollo

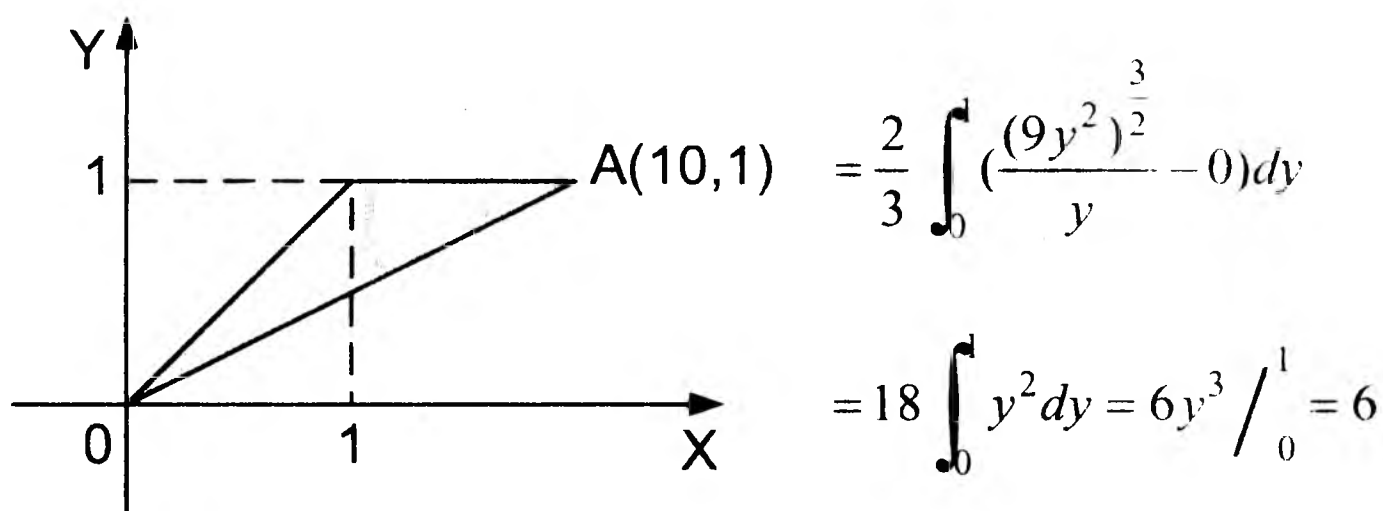
$$\begin{aligned}
 \iint_S \sqrt{x^2 - y^2} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-x}^x \sqrt{x^2 - y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{y}{2} \sqrt{x^2 - y^2} + \frac{x^2}{2} \arcsen \frac{y}{x} \right] \bigg|_{-x}^x dx \\
 &= \int_0^1 \left[\left(0 + \frac{x^2}{2} \arcsen 1\right) - \left(0 + \frac{x^2}{2} \arcsen(-1)\right) \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \arcsen 1 + \frac{x^2}{2} \arcsen 1 \right) dx \\
 &= \int_0^1 x^2 \arcsen 1 dx = \int_0^1 \frac{x^2 \pi}{2} dx = \frac{x^3 \pi}{6} \bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$



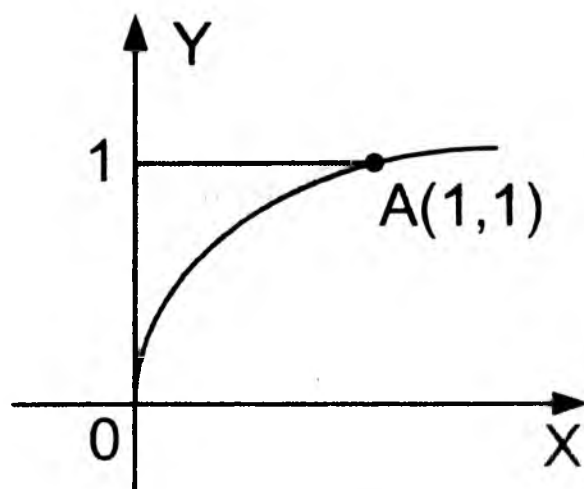
- 2149 $\iint_S \sqrt{xy - y^2} dx dy$, donde S es un triángulo con los vértices en los puntos O(0,0), A(10,1) y B(1,1).

Desarrollo

$$\iint_S \sqrt{xy - y^2} dx dy = \int_0^1 \left(\int_y^{10-y} \sqrt{xy - y^2} dx \right) dy = \int_0^1 \frac{2}{3y} (xy - y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_y^{10-y} dy$$



- 2150 $\iint_S e^{\frac{x}{y}} dx dy$, donde S es un triángulo mixtilíneo OAB, limitado por la parábola $y^2 = x$ y por las rectas $x = 0$, $y = 1$



Desarrollo

$$\iint_S e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy = \int_0^1 ye^{\frac{x}{y}} \Big|_0^{y^2} dy$$

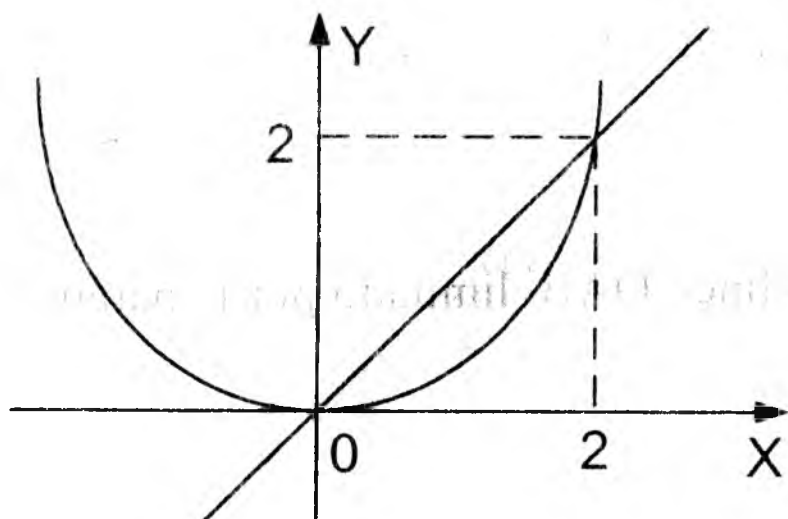
$$= \int_0^1 (ye^y - y) dy = (ye^y - e^y - \frac{y^2}{2}) \Big|_0^1 = (e - e + \frac{1}{2}) - (0 - 1 - 0) = \frac{1}{2}$$

2151 $\iint_S \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}$, donde S es un segmento parabólico limitado por la parábola

$$y = \frac{x^2}{2} \text{ y por la recta } y = x$$

Desarrollo

$$\iint_S \frac{x dx dy}{x^2 + y^2} = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^x \frac{x dy}{x^2 + y^2} \right) dx = \int_0^2 x \left(\frac{1}{x} \arctg \frac{y}{x} \right) \Big|_{\frac{x^2}{2}}^x dx = \int_0^2 (\arctg 1 - \arctg \frac{x}{2}) dx$$



$$= \int_0^2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{\pi x}{4} - x \arctg \frac{x}{2} + \ln(4 + x^2) \right] \Big|_0^2$$

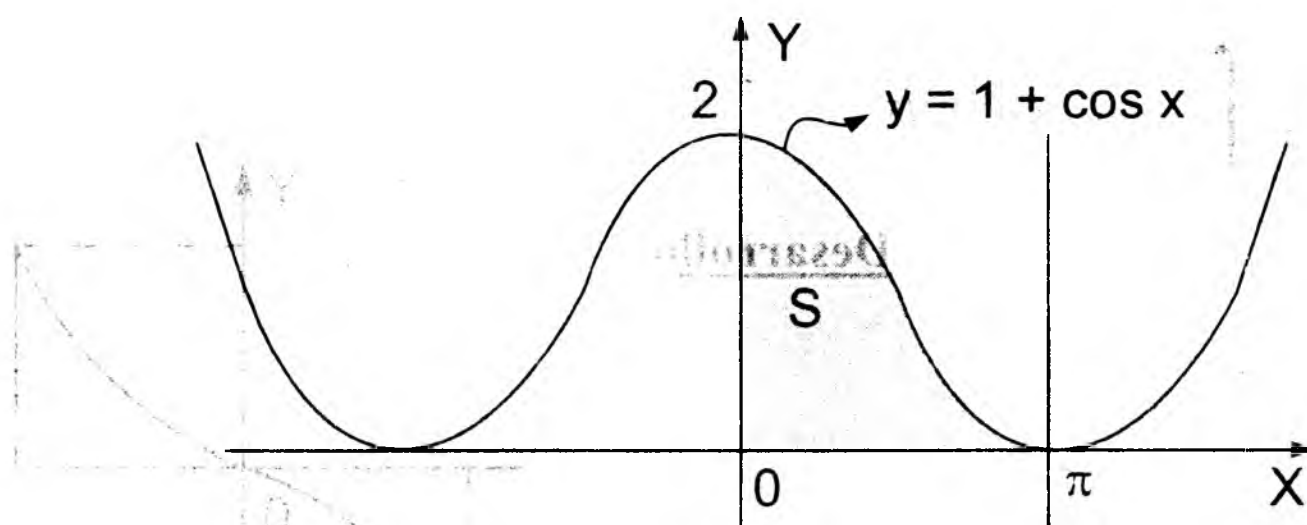
$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4} + \ln 8 \right) - (0 + \ln 4) = \ln 2$$

2152 Calcular las siguientes integrales y dibujar los recintos a que se extiende.

a) $\int_0^\pi dx \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x dx$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq 1 + \cos x \end{cases}$, graficando



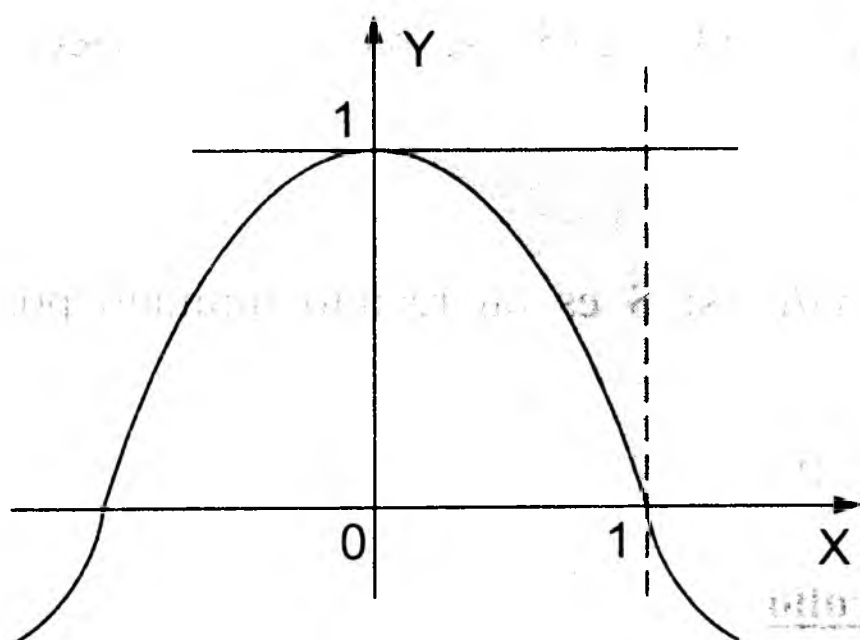
$$\iint_S y^2 \operatorname{sen} x \, dx \, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{1+\cos x} y^2 \operatorname{sen} x \, dy \right) dx = \int_0^\pi \frac{y^3 \operatorname{sen} x}{3} \Big|_0^{1+\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^\pi (1 + \cos x)^3 \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(1 + \cos x)^4}{4} \Big|_0^\pi = -\frac{1}{12} [0 - 2^4] = \frac{4}{3}$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^1 y^4 \, dy$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x \leq y \leq 1 \end{cases}$, graficando



$$\iint_D y^4 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{\cos x}^1 y^4 \, dy \right) dx$$

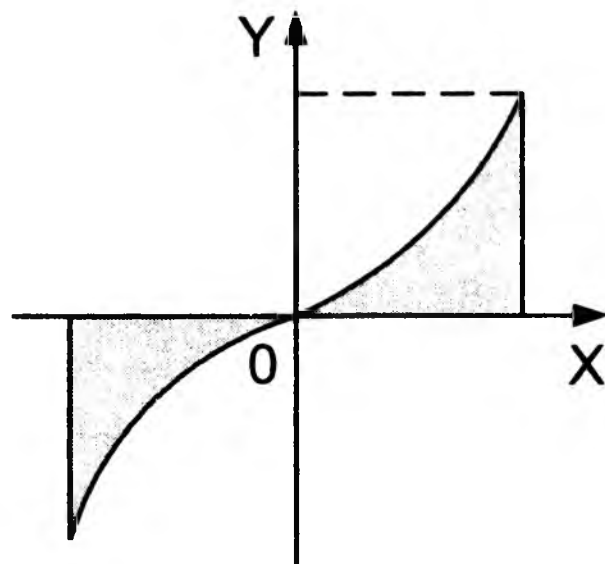
$$= \int_0^1 \frac{y^5}{5} \Big|_{\cos x}^1 dx$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^1 (1 - \cos^5 x) dx = \frac{15\pi - 16}{150}$$

$$c) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{3\cos y} x^2 \operatorname{sen}^2 y \, dx$$

Desarrollo

$$\text{Sea } D: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq x \leq 3\cos y \end{cases}$$



$$\iint_S x^2 \operatorname{sen}^2 y \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{3\cos y} x^2 \operatorname{sen}^2 y \, dx \right) dy$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^3 \operatorname{sen}^2 y}{3} \Big|_0^{3\cos y} dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 9 \cos^3 y \operatorname{sen}^2 y \, dy$$

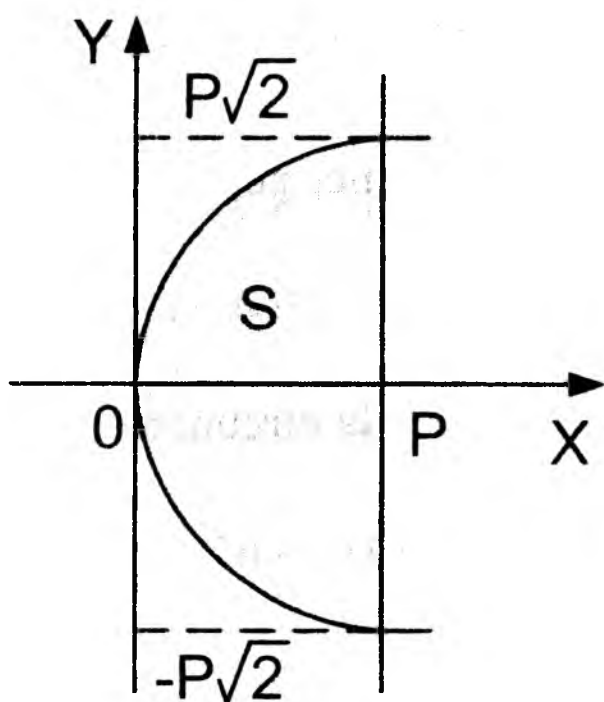
$$= 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{sen}^2 y) \operatorname{sen}^2 y \cos y \, dy = 9 \left(\frac{\operatorname{sen}^3 y}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 y}{5} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 9 \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \right] = 9 \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right] = \frac{12}{5}$$

Antes de resolver los problemas del 2153 – 2157 se recomienda hacer los dibujos correspondientes.

- 2153** Calcular la integral doble $\iint_S xy^2 \, dx \, dy$, si S es un recinto limitado por la parábola $y^2 = 2px$ y por la recta $x = p$.

Desarrollo



$$\iint_S xy^2 dx dy = \int_{-P\sqrt{2}}^{P\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{y^2}{2P}}^P xy^2 dx \right) dy$$

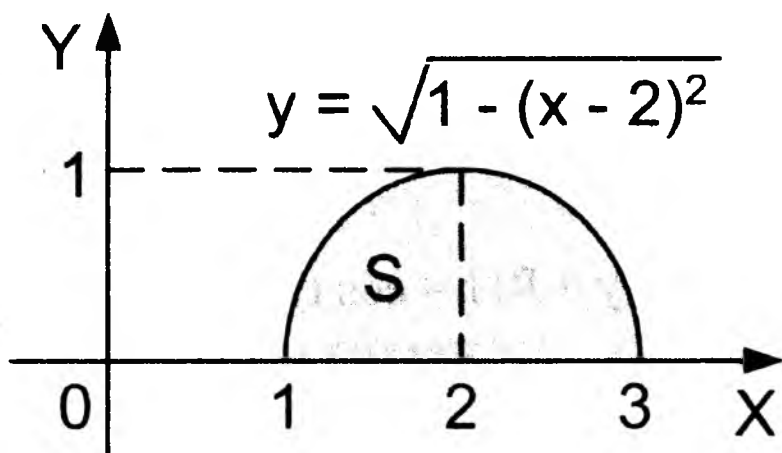
$$= \int_{-P\sqrt{2}}^{P\sqrt{2}} \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_{\frac{y^2}{2P}}^P dy$$

$$= \int_{-P\sqrt{2}}^{P\sqrt{2}} \left(\frac{P^2 y^2}{2} - \frac{y^6}{8P^2} \right) dy$$

$$= \left(\frac{P^2 y^3}{6} - \frac{y^7}{56P^2} \right) \Big|_{-P\sqrt{2}}^{P\sqrt{2}} = \frac{2P^5 \sqrt{2}}{6} - \frac{8P^5 \sqrt{2}}{56} = P^5 \sqrt{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = \frac{4\sqrt{2}P^5}{21}$$

- 2154** Calcular la integral doble $\iint_S xy dx dy$ que se extiende el recinto S, limitado por el eje OX y la semi circunferencia superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$

Desarrollo



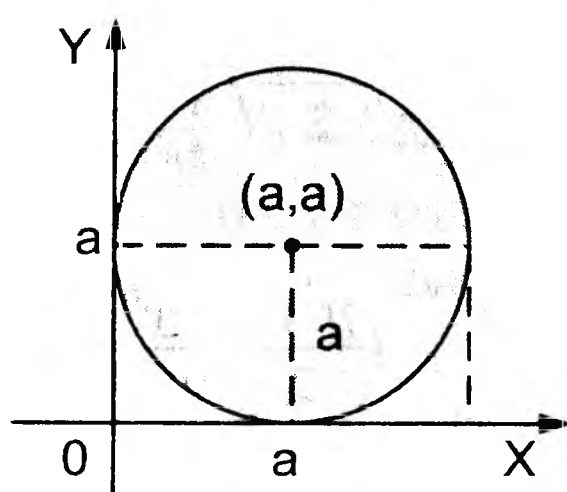
$$\iint_S xy dx dy = \int_1^3 \left(\int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy dy \right) dx$$

$$= \int_1^3 \frac{x}{2} (1 - (x-2)^2) dx$$

$$= \int_1^3 \left(2x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} \right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{8} - \frac{3x^2}{4} \right) \Big|_1^3$$

$$= \left(18 - \frac{81}{8} - \frac{27}{4} \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{8} - \frac{3}{4} \right) = \frac{4}{3}$$

- 2155** Calcular la integral doble $\iint_S \frac{dx dy}{2a-x}$, donde S es un círculo de radio a, tangente a los ejes coordenados y que se encuentra en el primer cuadrante.



Desarrollo

La ecuación de la circunferencia es:

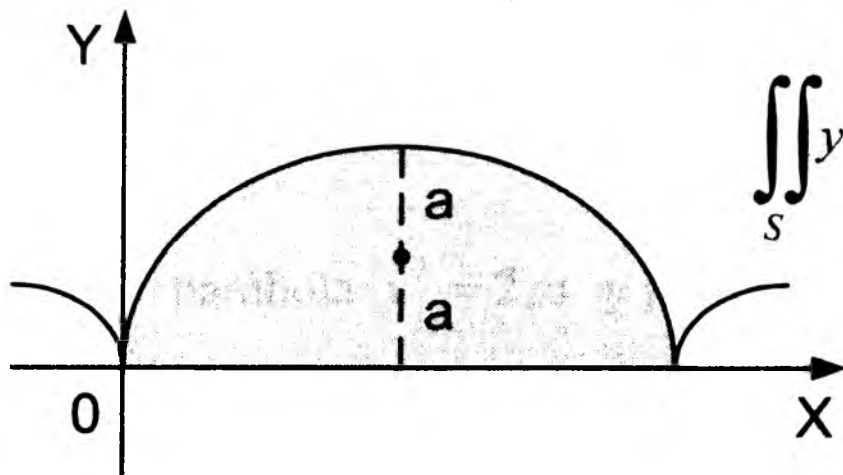
$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

$$y = a \pm \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dx dy}{2a-x} &= \int_0^{2a} \left(\int_{a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{a+\sqrt{a^2-(x-a)^2}} \frac{dy}{2a-x} \right) dx \\ &= \int_0^{2a} \frac{1}{2a-x} [(a + \sqrt{a^2 - (x-a)^2}) - (a - \sqrt{a^2 - (x-a)^2})] dx \\ &= 2 \int_0^{2a} \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{2a-x} dx = 2 \int_0^{2a} \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx = \frac{8}{3} a \sqrt{2a} \end{aligned}$$

- 2156** Calcular la integral doble $\iint_S y dx dy$, donde S está limitado por el eje de abscisa y el arco de la cicloide $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Desarrollo

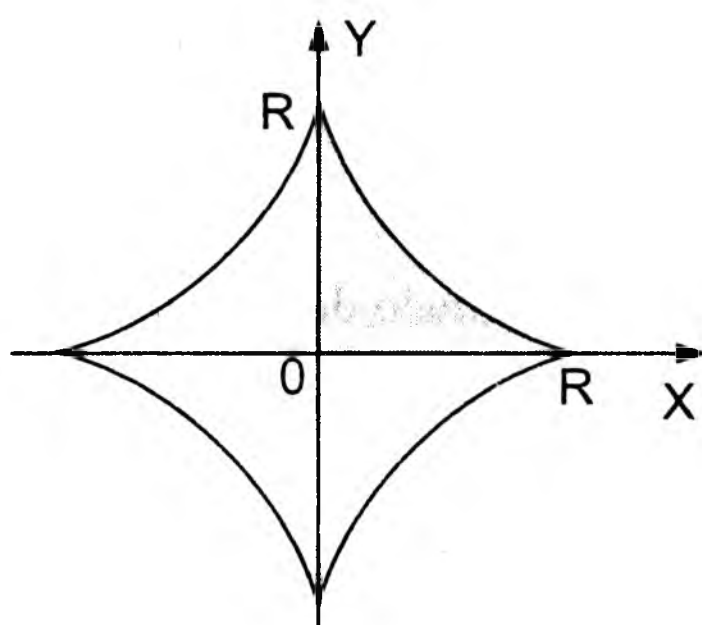


$$\iint_S y dx dy = \int_0^{2\pi} R(1 - \cos t) dt \int_0^{R(1-\cos t)} y dy = \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{2}$$

$$(1 + \cos t)^3 dt = \frac{5}{2} R^3 \pi$$

- 2157 Calcular la integral $\iint_S xy \, dx \, dy$ en la que el recinto de integración S está limitado por los ejes de coordenados y por el arco de astroide $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Desarrollo



$$\iint_S xy \, dx \, dy = \int_0^R x \, dx \int_0^{(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^R (R^2 x - 3R^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + 3R^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - x^3) \, dx = \frac{R^4}{80}$$

- 2158 Hallar el valor medio de la función $f(x, y) = xy^2$ en el recinto $S = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

INDICACIONES.- Se da el nombre de valor medio de una función $f(x, y)$ en el recinto S al número $\bar{f} = \frac{1}{S} \iint_S f(x, y) \, dx \, dy$, donde S en el denominador señala el área del recinto S .

Desarrollo

Calculando el área del recinto S

$$S = \iint_S dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 dy \right) dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$\bar{f} = \frac{1}{S} \iint_S f(x, y) dx dy = \iint_S xy^2 dx dy$$

$$\bar{f} = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \frac{xy^3}{3} \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{3} dx = \frac{x^2}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

- 2159** Hallar el valor medio del cuadrado de la distancia del punto $M(x, y)$ del círculo $(x-a)^2 + y^2 \leq R^2$ al origen de coordenadas.

Desarrollo

A la distancia del punto $M(x, y)$ al origen elevado al cuadrado denotaremos por:

$f(x, y) = x^2 + y^2$, luego tenemos:

$$\bar{f} = \frac{2}{S} \int_0^{a+R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - (x-a)^2}} (x^2 + y^2) dy \right) dx$$

$$= \frac{4}{R^2} \int_0^{a+R} \left(x^2 \sqrt{R^2 - (x-a)^2} + \frac{1}{3} (R^2 - (x-a)^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx = a^2 + \frac{R^2}{2}$$

$$\therefore \bar{f} = a^2 + \frac{R^2}{2}$$

7.2. CAMBIOS DE VARIABLES EN LA INTEGRAL DOBLE.-

1ro. INTEGRAL DOBLE EN COORDENADAS POLARES.-

Cuando en la integral doble se pasa de las coordenadas rectangulares x e y a las polares r, θ , relacionados con las primeras por las expresiones.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Se verifica la fórmula

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad \dots (1)$$

Si el recinto de integración S está limitado por los rayos $\theta = \alpha, \theta = \beta$. ($\alpha < \beta$) y por las curvas $r = r_1(\theta)$ y $r = r_2(\theta)$ donde $r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$ y además son funciones uniformes en el segmento $\alpha \leq \theta \leq \beta$, la integral doble se puede calcular por la fórmula.

$$\iint_S f(\theta, r) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(\theta, r) r dr$$

donde $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

al calcular la integral $\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} F(\theta, r) dr$ se considera constante la magnitud θ .

Si el recinto de integración no pertenece a la forma examinada, se divide en partes, de manera que cada una de ellas represente de por sí un recinto de la forma dada.

2do. INTEGRAL DOBLE EN COORDENADAS CURVILÍNEAS.-

En el caso más general, si en la integral doble $\iint_S f(x, y) dx dy$ se quiere pasar de las variables x, y a las variables u y v relacionadas con aquellos por medio de las expresiones continuas y diferenciables.

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

que se establecen una correspondencia biunívoca y continua en ambos sentidos, entre los puntos del recinto S del plano XOY y los puntos de un recinto determinado S' del plano uov , al mismo tiempo que el Jacobiano.

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

conserva invariable su signo en el recinto S , será válida la fórmula.

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{S'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I| du dv$$

Los límites de integración se determinan de acuerdo con las reglas generales sobre la base de la forma que tenga el recinto S' .

Pasar a las coordenadas polares r y θ y colocar los límites de integración para las nuevas variables en las siguientes integrales.

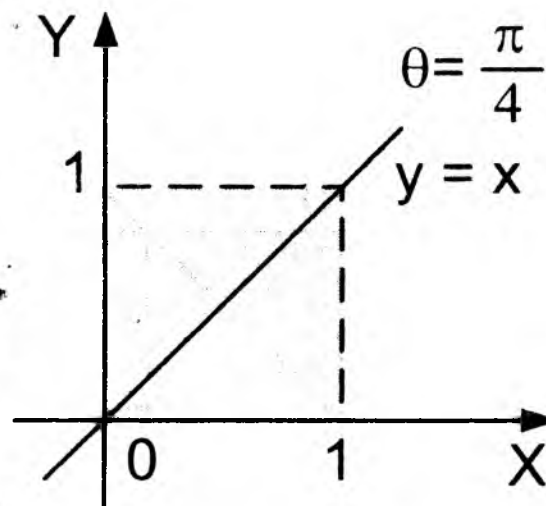
$$2160 \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

Desarrollo

Sea $S : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

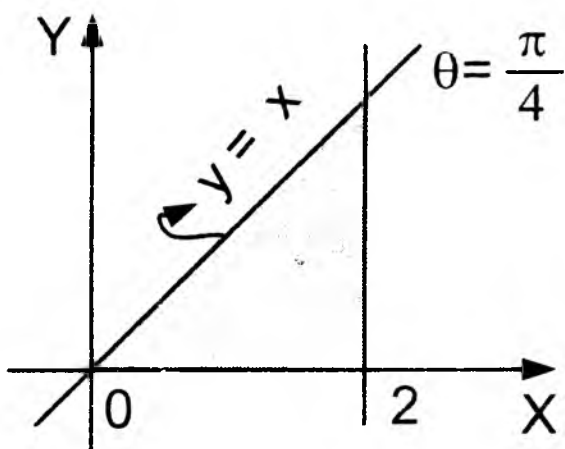
$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$$



$$= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{\cos \theta}^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

2161 $\int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$



Desarrollo

Graficando la región sobre el cual se integra

Pasando a coordenadas polares

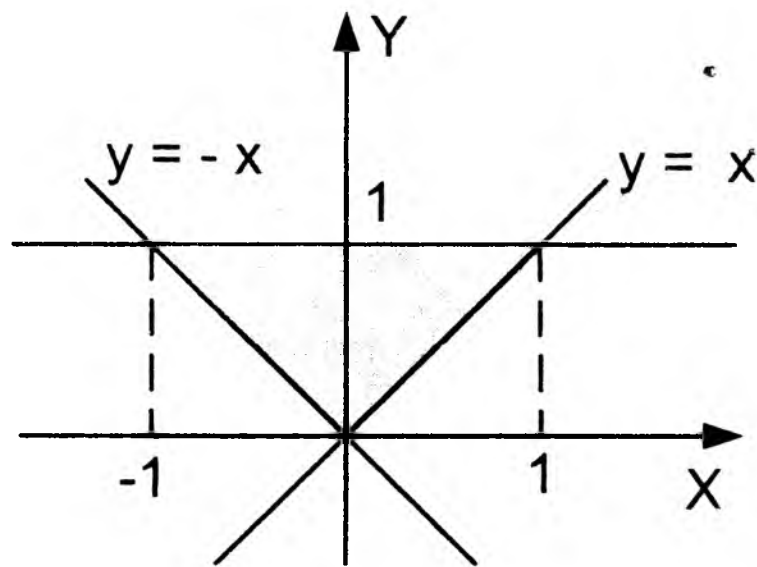
$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

$$\int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(r) r dr$$

2162 $\iint_S f(x, y) dx dy$ donde S es un triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$,
e $y = 1$

Desarrollo

Graficando la región S se tiene:



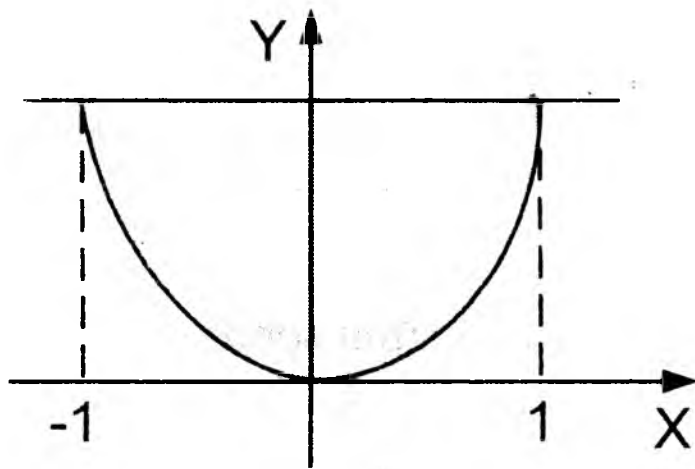
Pasando a coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) dx dy &= \int_0^1 dy + \int_{-y}^y f(x, y) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \end{aligned}$$

2163 $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy$

Desarrollo



Sea $S: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$

graficando la región S se tiene:

Pasando a coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

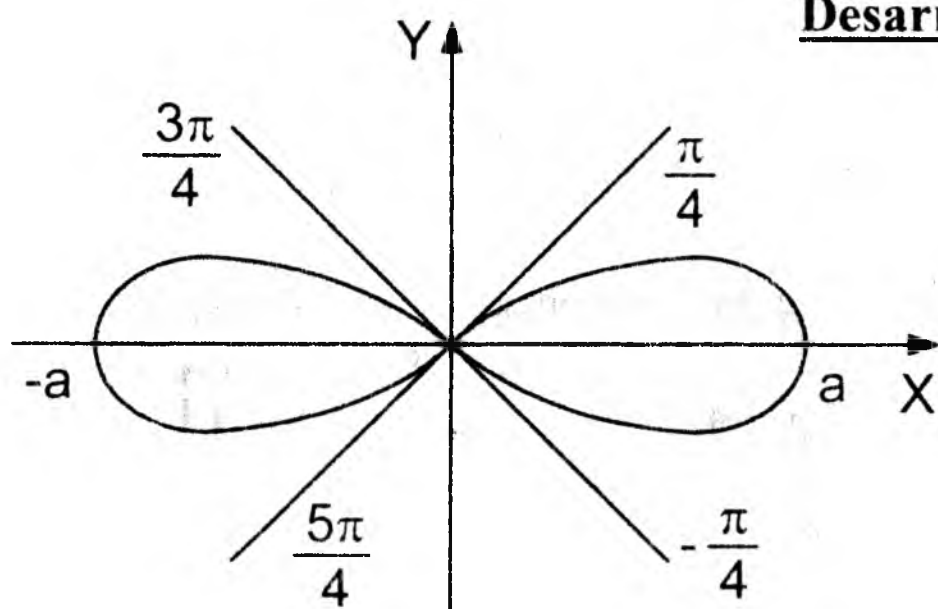
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} f(\tan \theta) r dr + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} f(\tan \theta) r dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} f(\tan \theta) r dr \end{aligned}$$

NOTA.- Como $y = x^2 \Rightarrow r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$

2164 $\iint_S f(x, y) dx dy$, donde el recinto S está limitado por la lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

Desarrollo



Pasando a coordenadas polares

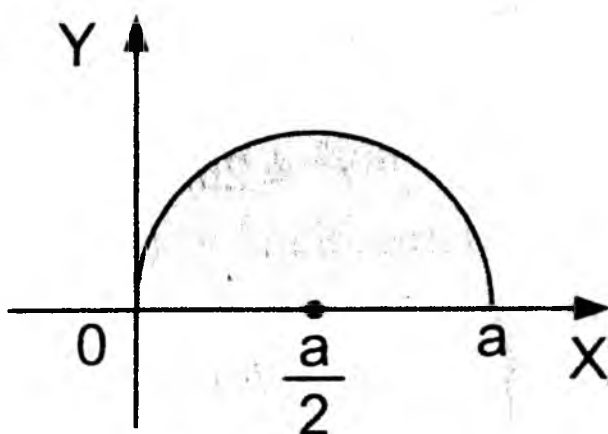
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$r^4 = a^2 r^2 \cos 2\theta$$

$$r = 0, \quad r = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \\ &+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \end{aligned}$$

- 2165 Calcular la siguiente integral doble, pasando previamente a coordenadas polares $\iint_S y dx dy$ donde S es un semicírculo de diámetro a con centro en el punto $C(\frac{a}{2}, 0)$



Desarrollo

La ecuación del gráfico es: $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$

$$x^2 + y^2 - ax = 0 \Rightarrow y = \sqrt{ax - x^2}$$

como $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ entonces

$$r^2 - ar \cos \theta = 0 \Rightarrow r = 0, r = a \cos \theta$$

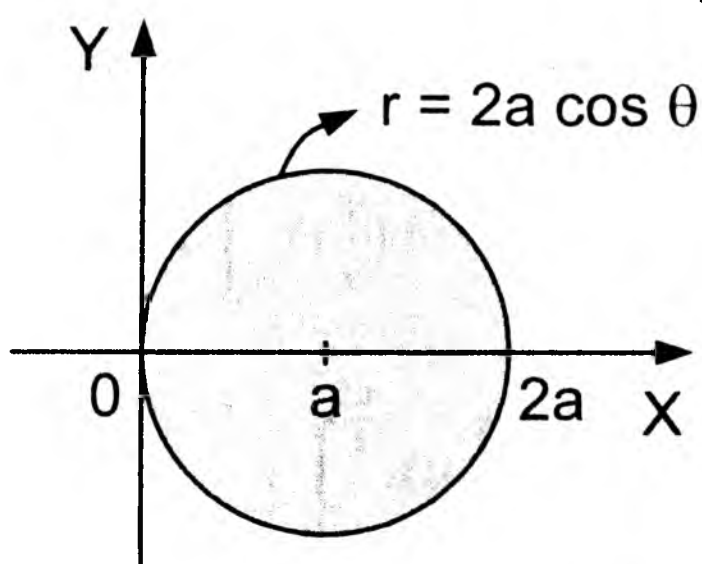
$$\begin{aligned} \iint_S y \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r \sin \theta \, r \, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \sin \theta \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3 \cos^3 \theta}{3} \sin \theta \, d\theta = \frac{a^3}{3} \left(-\frac{\cos^4 \theta}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^3}{12} [0 - 1] = \frac{a^3}{12} \end{aligned}$$

2166 Pasando a coordenadas polares, calcular la siguiente integral doble

$$\iint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \text{ que se extiende al recinto limitado por la circunferencia}$$

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

Desarrollo



$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = a^2$$

pasando a coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$r^2 = 2ar \cos \theta \Rightarrow r = 2a \cos \theta$$

$$\iint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \cos \theta} r^2 \cdot r \, dr \right) d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2a \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16a^4 \cos^4 \theta \, d\theta = 8a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta$$

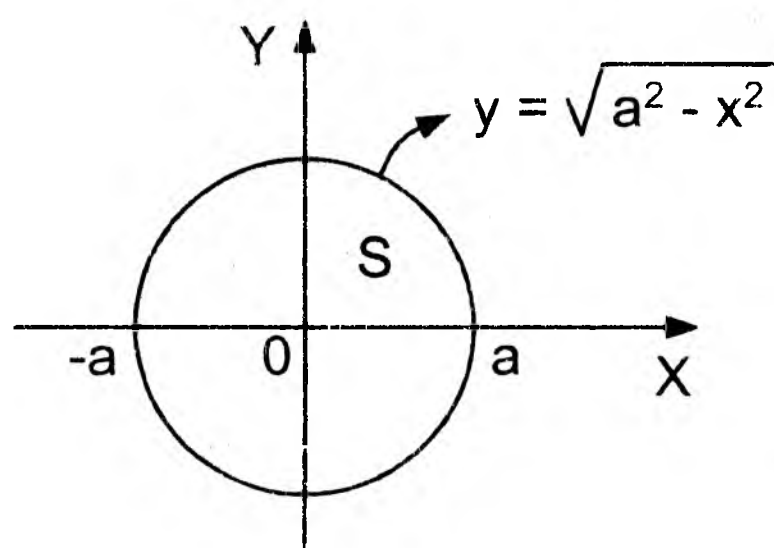
$$= 2a^4 \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta = \frac{3\pi a^4}{2}$$

2167 Calcular la siguiente integral doble, pasando a coordenadas polares

$$\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \text{ donde el recinto de integración } S \text{ es un semicírculo de}$$

radio a con centro en el origen de coordenadas, situado sobre el eje X .

Desarrollo



$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

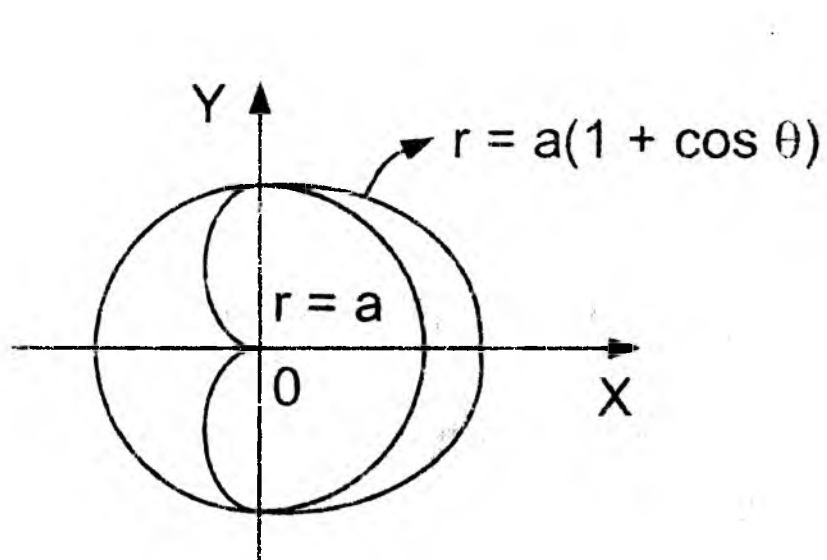
$$= \int_{-a}^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy \right) dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr \right) d\theta = -\frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^a d\theta = \frac{2a^3}{3} \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^3 \pi}{3}$$

2168 Calcular la integral doble de la función $f(r, \theta) = r$ sobre el recinto limitado por la cardiode $r = a(1 + \cos \theta)$ y la circunferencia $r = a$ (se considera el recinto que no contiene al polo)

Desarrollo

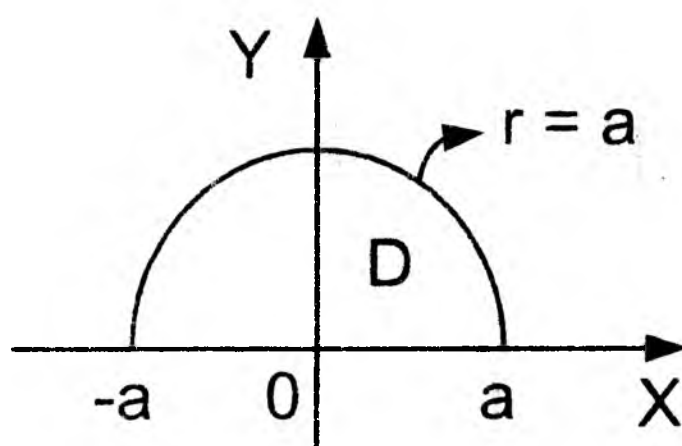
$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2 \int_0^{\pi/2} \left(\int_a^{a(1+\cos \theta)} r^2 dr \right) d\theta$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1 + \cos \theta)^3 - 1] d\theta \\
 &= \frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 \theta + 3\cos^2 \theta + 3\cos \theta) d\theta \\
 &= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{22}{9}\right)a^3
 \end{aligned}$$

- 2169 Calcular la siguiente integral pasando a coordenadas $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy$

Desarrollo



Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow dx dy = r dr d\theta$$

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r \cdot r dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{a^3 \pi}{6}$$

- 2170 Calcular la integral siguiente, pasando a coordenadas polares

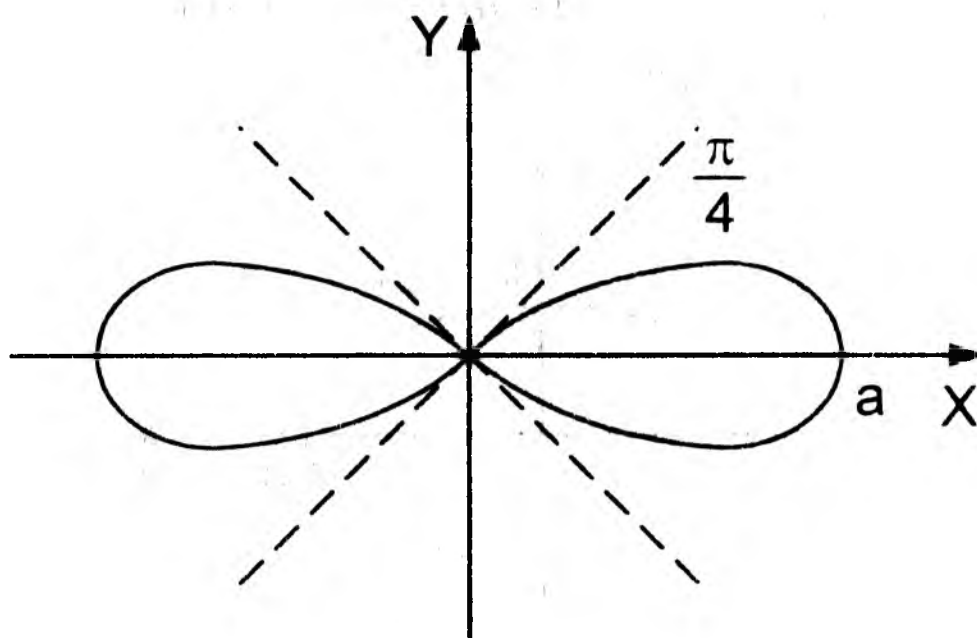
$$\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy, \text{ donde el recinto } S \text{ está limitado por la hoja de}$$

$$\text{lemniscata } (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad x \geq 0$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \Rightarrow r = a\sqrt{\cos 2\theta}, \text{ Graficando}$$



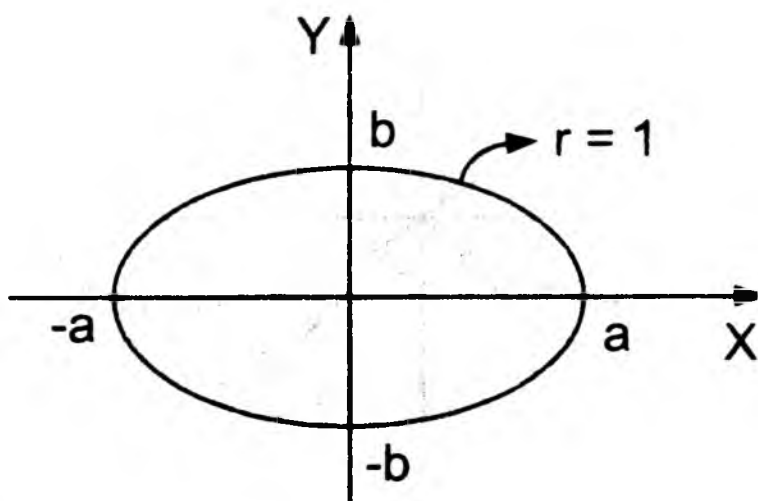
$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy &= 2 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, dr \right) d\theta \\ &= \frac{a^3}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2} - 20}{9} \right) \end{aligned}$$

- 2171** Calcular la integral doble $\iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy$, que se extiende al recinto S, limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, pasando a las coordenadas polares generalizadas r y θ según las fórmulas $\frac{x}{a} = r \cos \theta$, $\frac{y}{b} = r \sin \theta$

Desarrollo

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = r \cos \theta \\ \frac{y}{b} = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$$

$$J(r, \theta) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr, \text{ Graficando}$$



$$\iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1 - r^2} abr dr \right) d\theta = \frac{ab}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2ab\pi}{3}$$

- 2172** Transformar la integral $\int_0^c dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy$, ($0 < \alpha < \beta$, $c > 0$) introduciendo las nuevas variables $u = x + y$, $uv = y$

Desarrollo

Como $\begin{cases} x + y = u \\ y = uv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u(1 - v) \\ y = uv \end{cases}$, de donde

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

calculando los límites de la integral

$$\text{para } \begin{cases} x=0, u=0 \\ x=c, u=\frac{c}{1-v} \end{cases}, \begin{cases} y=\alpha x=uv, v=\frac{\alpha}{1+\alpha} \\ y=u-\frac{uv}{\alpha}, v=\frac{\beta}{1+\beta} \end{cases}$$

$$\int_0^c dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy = \int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} \left(\int_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv) u du \right) dv$$

2173 Efectuar el cambio de variable $u = x + y$, $v = x - y$ en la integral

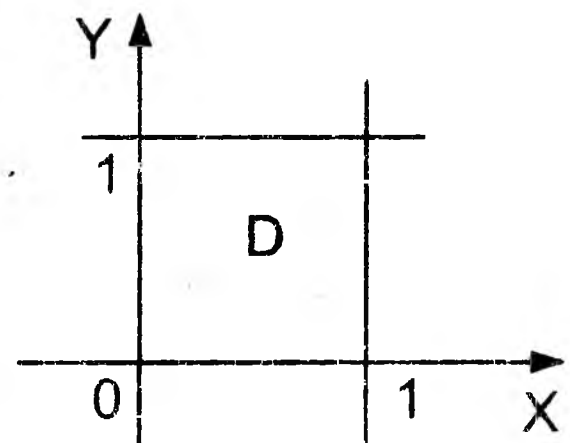
$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

Desarrollo

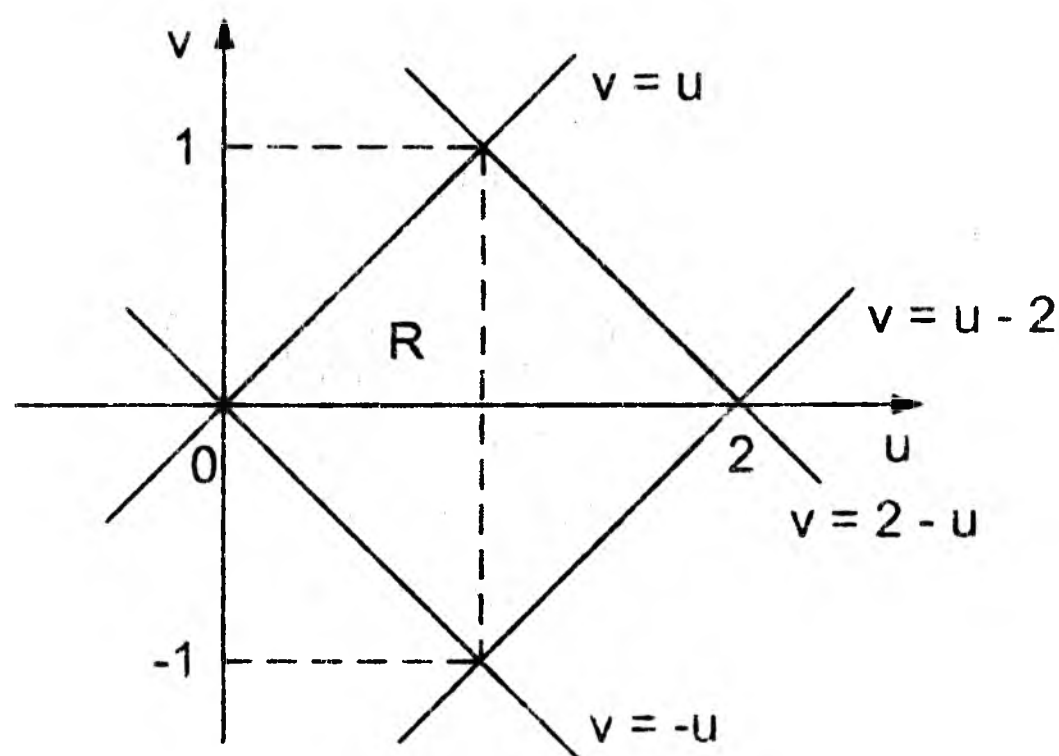
$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Sea } D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



$$\text{Calculando para } \begin{cases} x=0, v=-u \\ x=1, u+v=2 \end{cases}; \begin{cases} y=0, v=u \\ y=1, u-v=2 \end{cases}$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \iint_R f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) |J(u, v)| du dv$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 du \int_{-u}^u f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv + \int_1^2 du \int_{u-2}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 dv \int_v^{2+v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du + \int_0^1 dv \int_v^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du \right]$$

2174 Calcular la integral doble $\iint_S dx dy$, donde S es un recinto limitado por la

curva $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$.

INDICACIÓN.- Efectuar el cambio de variables $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$

Desarrollo

Como la ecuación es: $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$, entonces

$r^4 = r^2 \left(\frac{a^2 \cos^2 \theta}{h^2} - \frac{b^2 \sin^2 \theta}{k^2} \right)$ de donde el limite inferior es $r = 0$, y el limite

superior es $r = \sqrt{\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta}$

como r debe ser real entonces $\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta \geq 0$, de donde para el

primer ángulo coordenado, tenemos que $\operatorname{tg} \theta \leq \frac{ak}{bh}$

Luego por simetría del campo de integración con respecto a los ejes, se puede calcular basándose en el 1er cuadrante multiplicado por 4.

$$\begin{aligned} \iint_S dx dy &= 4 \int_0^{\operatorname{arctg}(\frac{ak}{bh})} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta}} abr dr \\ &= ab \left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{ak}{bh} + \frac{ab}{hk} \right) \right] \end{aligned}$$

7.3. CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS.-

1ro. EL AREA EN COORDENADAS RECTANGULARES.-

El área S del recinto plano (S) es igual a:

$$S = \iint_S dx dy$$

Si el recinto (S) está determinado por las desigualdades $a: a \leq x \leq b$, $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ de donde se tiene:

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy$$

2do. EL AREA EN COORDENADAS POLARES.-

Si el recinto (S) está determinado en coordenadas polares r y θ , por las desigualdades $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $f(\theta) \leq r \leq g(\theta)$, se tiene:

$$S = \iint_S r \, dr \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{f(\theta)}^{g(\theta)} r \, dr$$

2175 Construir los recintos cuyas áreas se expresan por las siguientes integrales:

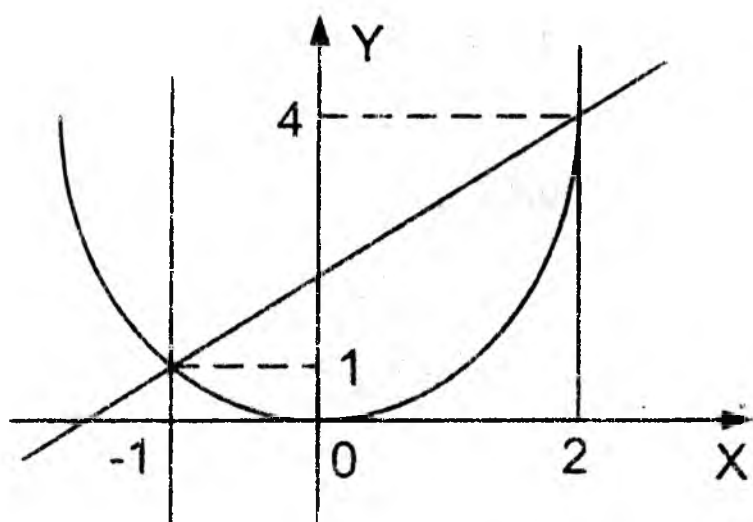
a) $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy$

b) $\int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$

Calcular estas áreas y cambiar el orden de integración.

Desarrollo

a) Sea $S: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq x+2 \end{cases}$, graficando



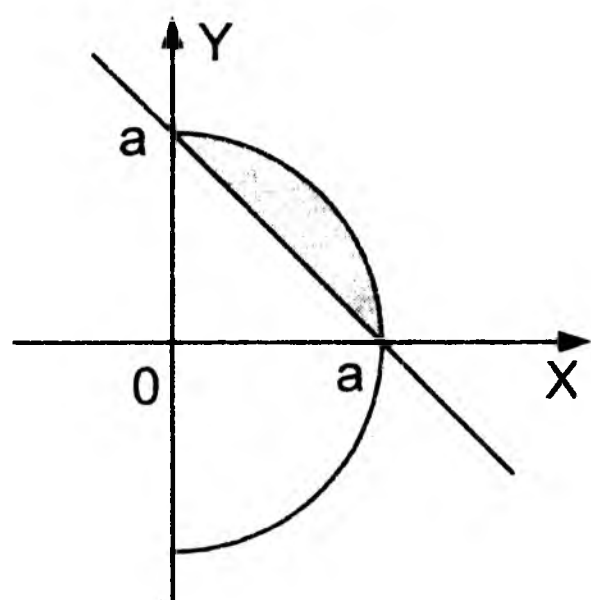
$$S = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx$$

$$S = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 4\frac{1}{2}$$

$$S = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx$$

b) Sea $S: \begin{cases} 0 \leq y \leq a \\ a-y \leq x \leq \sqrt{a^2-y^2} \end{cases}$, graficando

$$S = \int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx = \int_0^a (\sqrt{a^2-y^2} - a + y) dy$$



$$= \left[\frac{y}{2} \sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen\left(\frac{y}{a}\right) - ay + \frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^a$$

$$S = \frac{a^2 \pi}{4} - \frac{a^2}{2}$$

$$S = \int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx = \int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

2176 Construir los recintos cuyas áreas se expresan por las integrales.

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\theta \int_0^{3\sec\theta} r dr$

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a(1+\cos\theta)} r dr$

Calcular estas áreas.

Desarrollo

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\theta \int_0^{3\sec\theta} r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{3\sec\theta} d\theta = \frac{9}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} \sec^2 \theta d\theta$

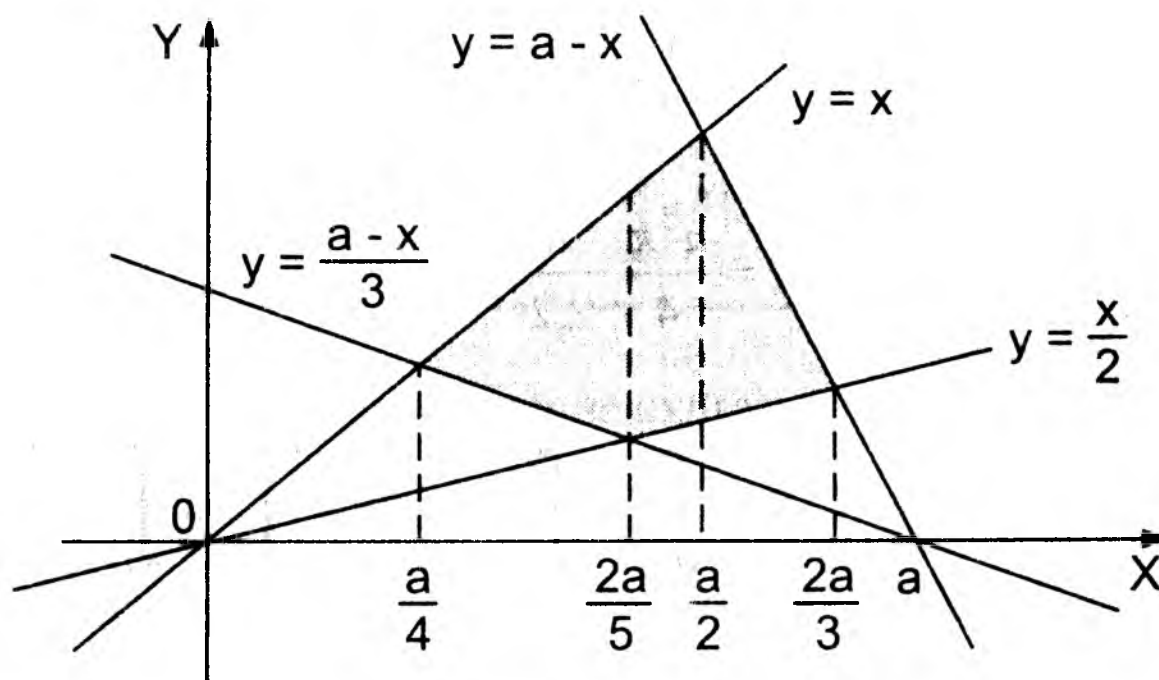
$$= \frac{9}{2} (\operatorname{tg} \theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{9}{2} (2-1) = \frac{9}{2}$$

b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a(1+\cos\theta)} r dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} \Big|_a^{a(1+\cos\theta)} d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1+\cos\theta)^2 - 1] d\theta$

$$= \frac{a^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta + 2\cos\theta) d\theta = a^2 \left(2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

- 2177 Calcular el área limitada por las rectas $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 2y = a$, $a > 0$.

Desarrollo

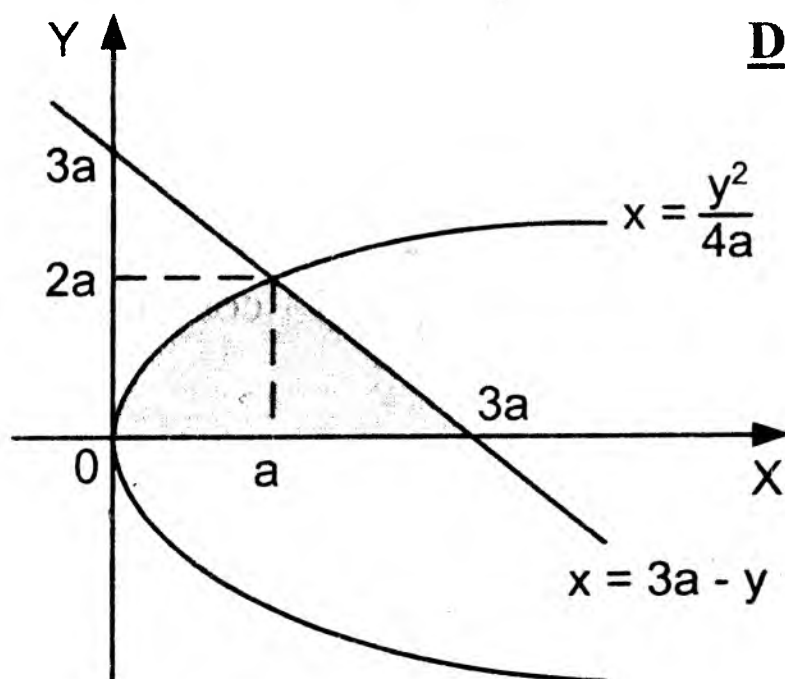


$$A = \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{2a}{5}} dx \int_{\frac{a-x}{3}}^x dy + \int_{\frac{2a}{5}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{2a}{3}} dx \int_{\frac{x}{2}}^{a-x} dy$$

$$A = \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{2a}{5}} \frac{2x-a}{3} dx + \int_{\frac{2a}{5}}^{\frac{a}{2}} \frac{x}{2} dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{2a}{3}} \frac{2a-3x}{2} dx = \frac{7a^2}{120}$$

- 2178 Calcular el área de la figura situada sobre el eje OX y limitada por este eje, la parábola $y^2 = 4ax$ y la recta $x + y = 3a$.

Desarrollo



$$A = \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y} dx = \int_0^{2a} \left(3a - y - \frac{y^2}{4a}\right) dy$$

$$A = \left(3ay - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12a}\right) \Big|_0^{2a} \Rightarrow A = \frac{10a^3}{3}$$

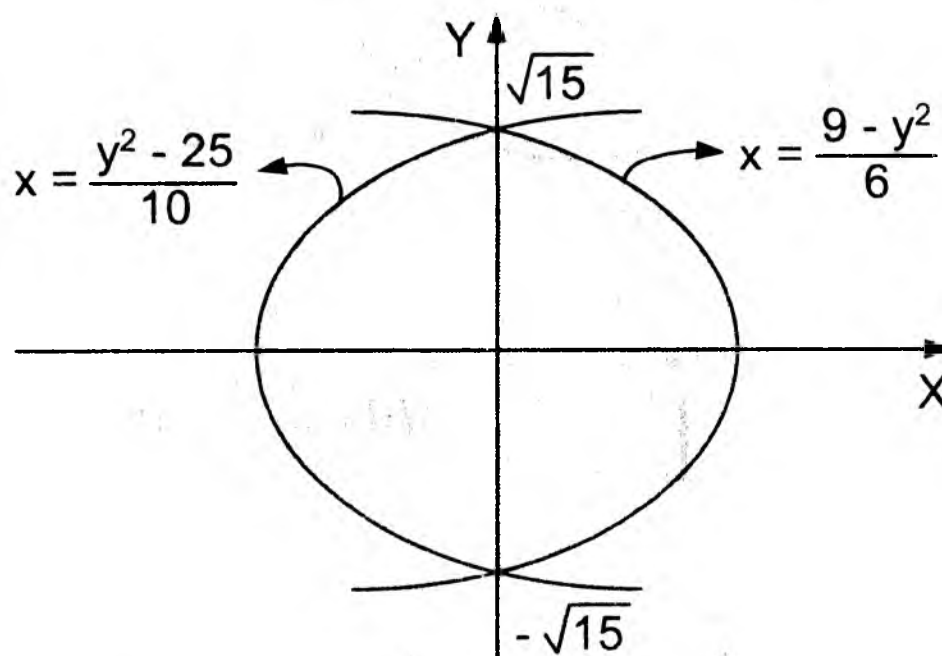
2179 Calcular el área limitada por la elipse $(y-x)^2 + x^2 = 1$

Desarrollo

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 dx \int_{x-\sqrt{1-x^2}}^{x+\sqrt{1-x^2}} dy = \int_{-1}^1 [(x+\sqrt{1-x^2}) - (x-\sqrt{1-x^2})] dx \\ &= \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx = 2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsen x \right] \Big|_{-1}^1 \\ &= 2 \left[\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) - \left(0 - \frac{\pi}{4}\right) \right] = \pi \end{aligned}$$

2180 Hallar el área limitada por las parábolas $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$

Desarrollo

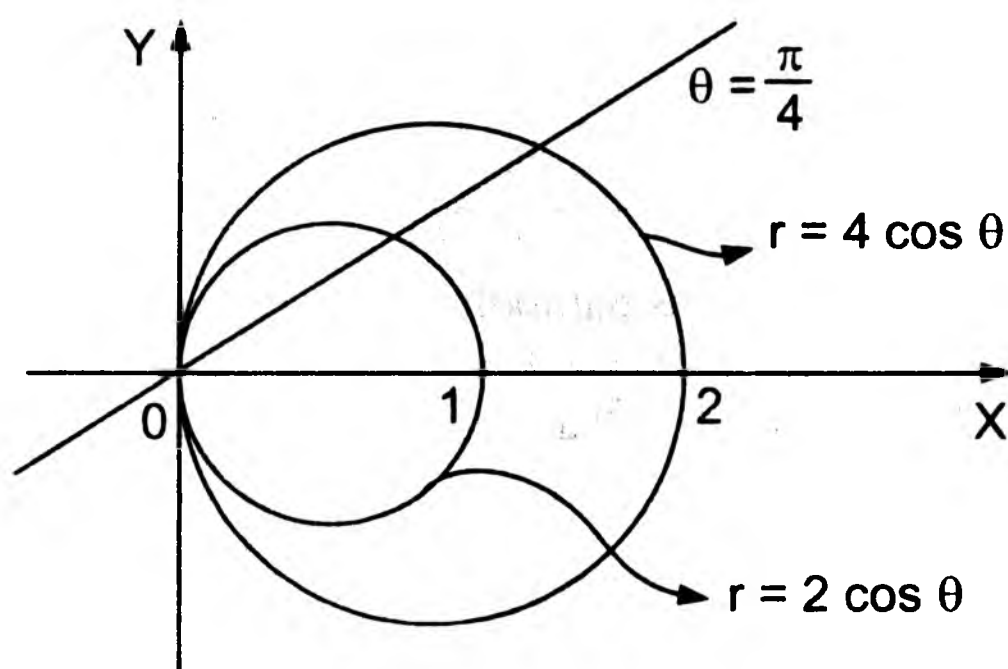


$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(\frac{9-y^2}{6} - \frac{y^2-25}{10} \right) dy \\ &= \frac{4}{15} \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} (15-y^2) dy = \frac{4}{15} \left[15y - \frac{y^3}{3} \right] \Big|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \\ &= \frac{4}{15} \left[\left(15\sqrt{15} - \frac{15}{3}\sqrt{15} \right) - \left(-15\sqrt{15} + \frac{15}{3}\sqrt{15} \right) \right] = \frac{4}{15} (20\sqrt{15}) = \frac{16}{3} (\sqrt{15}) \end{aligned}$$

- 2181** Hallar el área limitada por las siguientes líneas, pasando a coordenadas polares
 $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 2r \cos \theta \\ r^2 = 4r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \cos \theta \\ r = 4 \cos \theta \end{cases}$$



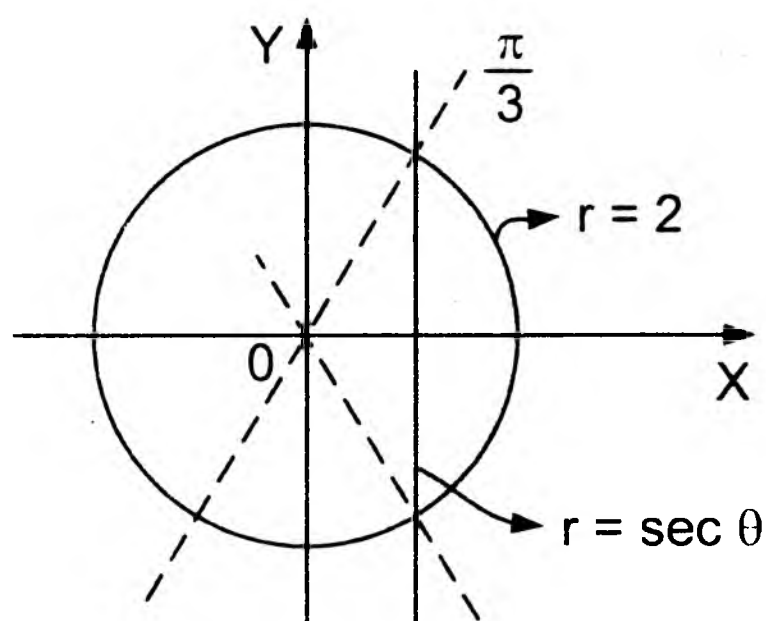
$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2} \Big|_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (16 \cos^2 \theta - 4 \cos^2 \theta) d\theta$$

$$A = 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = 3\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

$$= 3\left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2}\right) - (0)\right] = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2} \quad \therefore A = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

- 2182** Hallar el área limitada por la recta $r \cos \theta = 1$ y la circunferencia $r = 2$ (se considera la superficie que no contiene el polo).

Desarrollo



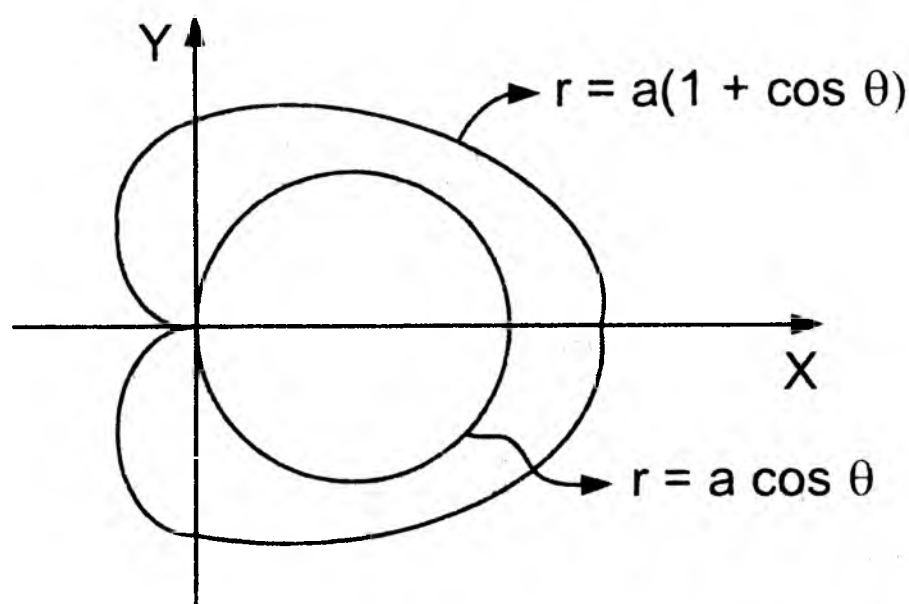
$$A = 2 \int_0^{\pi/3} d\theta \int_{\sec \theta}^2 r dr = \int_0^{\pi/3} r^2 \Big|_{\sec \theta}^2 d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/3} (4 - \sec^2 \theta) d\theta = (4\theta - \operatorname{tg} \theta) \Big|_0^{\pi/3}$$

$$A = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

2183 Hallar el área limitada por las curvas $r = a(1 + \cos \theta)$, $r = a \cos \theta$

Desarrollo



$$A = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{a \cos \theta}^{a(1 + \cos \theta)} r dr + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{a(1 + \cos \theta)} r dr = \frac{5a^2 \pi}{4}$$

2184 Hallar el área limitada por la línea $(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9})^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$

Desarrollo

Sean $\begin{cases} x = 2r \cos \theta \\ y = 3r \operatorname{sen} \theta \end{cases} \Rightarrow dx dy = 6r d\theta dr$

$$r^4 = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \Rightarrow r = 0, \quad r = \sqrt{\cos 2\theta}$$

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} 6r \, dr = 24 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta = 6 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 6$$

2185 Hallar el área limitada por la elipse $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$

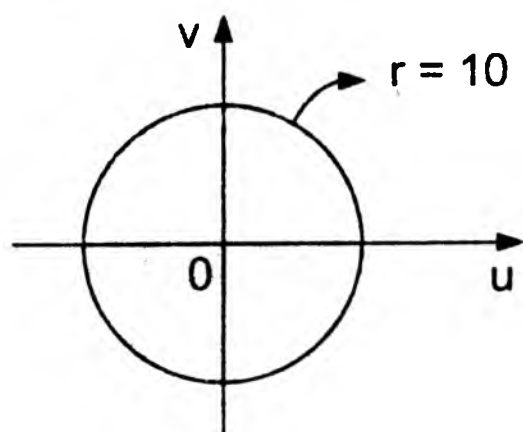
Desarrollo

$$\text{Sean } \begin{cases} u = x - 2y + 3 \\ v = 3x + 4y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2u + v - 5}{5} \\ y = \frac{v - 3u + 10}{10} \end{cases}$$

Calculando el Jacobiano se tiene:

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{vmatrix} = \frac{2}{50} + \frac{3}{50} = \frac{1}{10}$$

$$A = \iint_S dx \, dy = \iint_R |J(u, v)| \, du \, dv = \frac{1}{10} \iint_R du \, dv$$



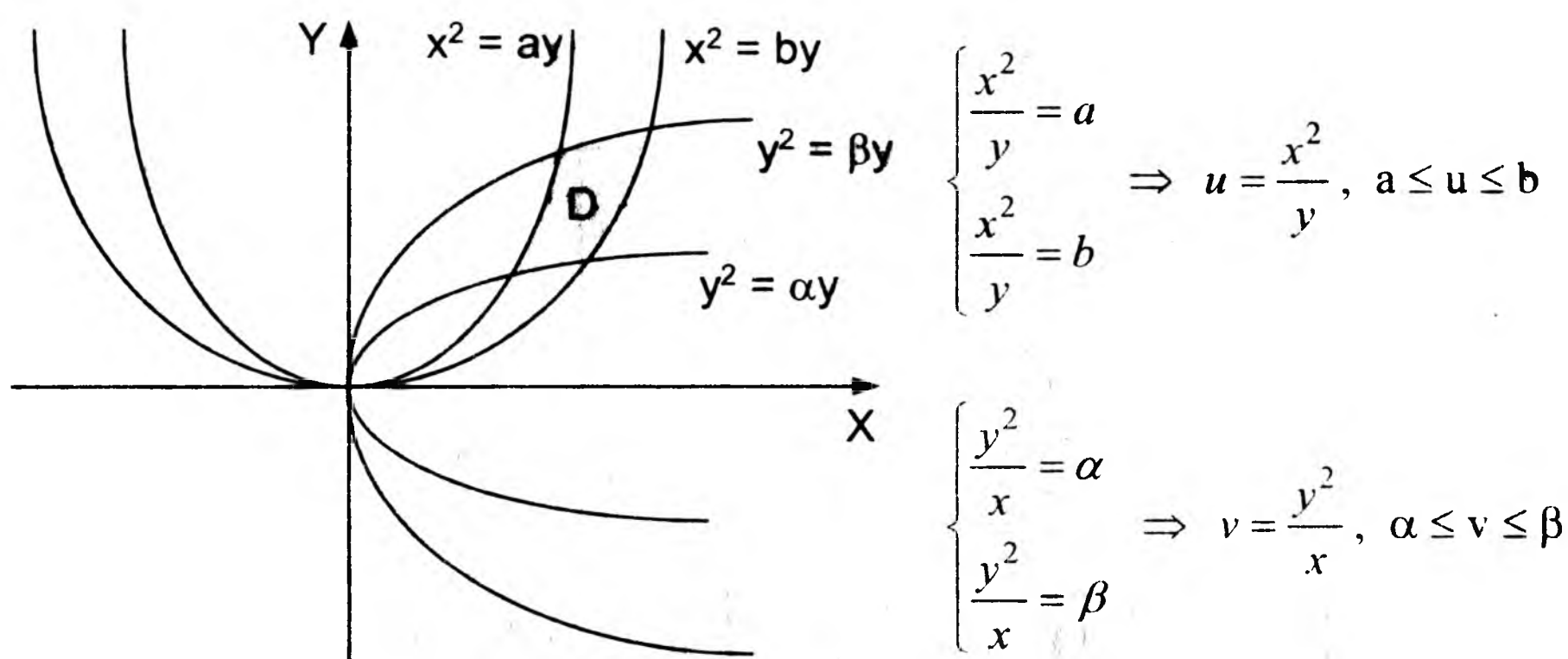
donde $R: u^2 + v^2 = 100$

$$A = 4 \left[\frac{1}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{10} r \, dr \right]$$

$$A = \frac{2}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{10} d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 100 d\theta = 20\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \therefore A = 10\pi$$

2186 Hallar el área del cuadrilátero curvilíneo limitado por los arcos de las parábolas $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$ ($0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$)

Desarrollo



$$R = \{(u,v) / a \leq u \leq b \wedge \alpha \leq v \leq \beta\}$$

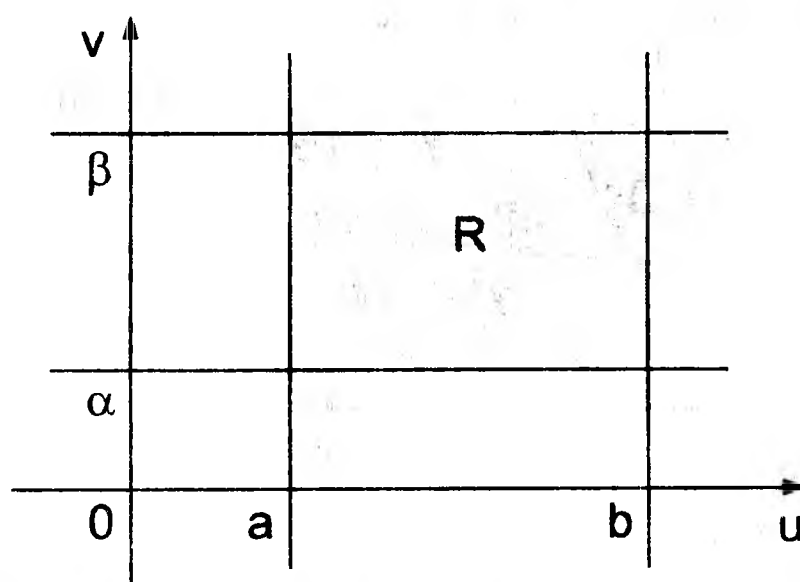
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} = u \\ \frac{y^2}{x} = v \end{cases} \Rightarrow xy = uv \Rightarrow y = \frac{uv}{x}$$

$$y^2 = \frac{u^2 v^2}{x^2} = \frac{u^2 v^2}{uv} \Rightarrow y^3 = uv^2 \Rightarrow \begin{cases} y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ x = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Calculando el Jacobiano se tiene:

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

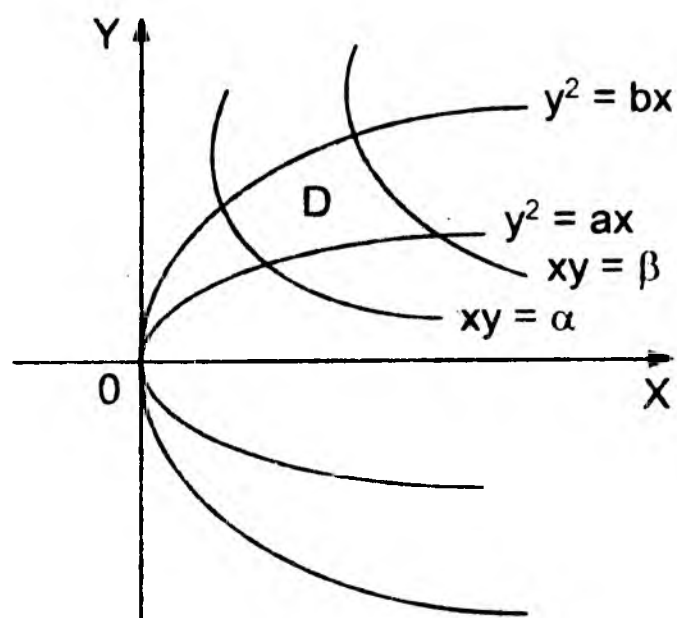
$$A = \iint_D dx dy = \iint_R |J(u, v)| du dv = \frac{1}{3} \iint_R du dv$$



$$A = \iint_D dx dy = \frac{1}{3} \iint_R du dv = \frac{1}{3} \int_a^b du \int_{\alpha}^{\beta} dv = \frac{1}{3} (\beta - \alpha)(b - a)$$

- 2187** Hallar el área del cuadrilátero curvilíneo limitado por los arcos de las curvas $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ ($0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$)

Desarrollo



$$\begin{cases} \frac{y^2}{x} = a \\ \frac{y^2}{x} = b \end{cases} \Rightarrow u = \frac{y^2}{x}, \quad a \leq u \leq b$$

$$\begin{cases} xy = \alpha \\ xy = \beta \end{cases} \Rightarrow v = xy, \quad \alpha \leq v \leq \beta$$

$$R = \{(u,v) / a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta\}$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x} = u \\ xy = v \end{cases} \Rightarrow y^3 = uv \Rightarrow \begin{cases} y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} \\ x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix}$$

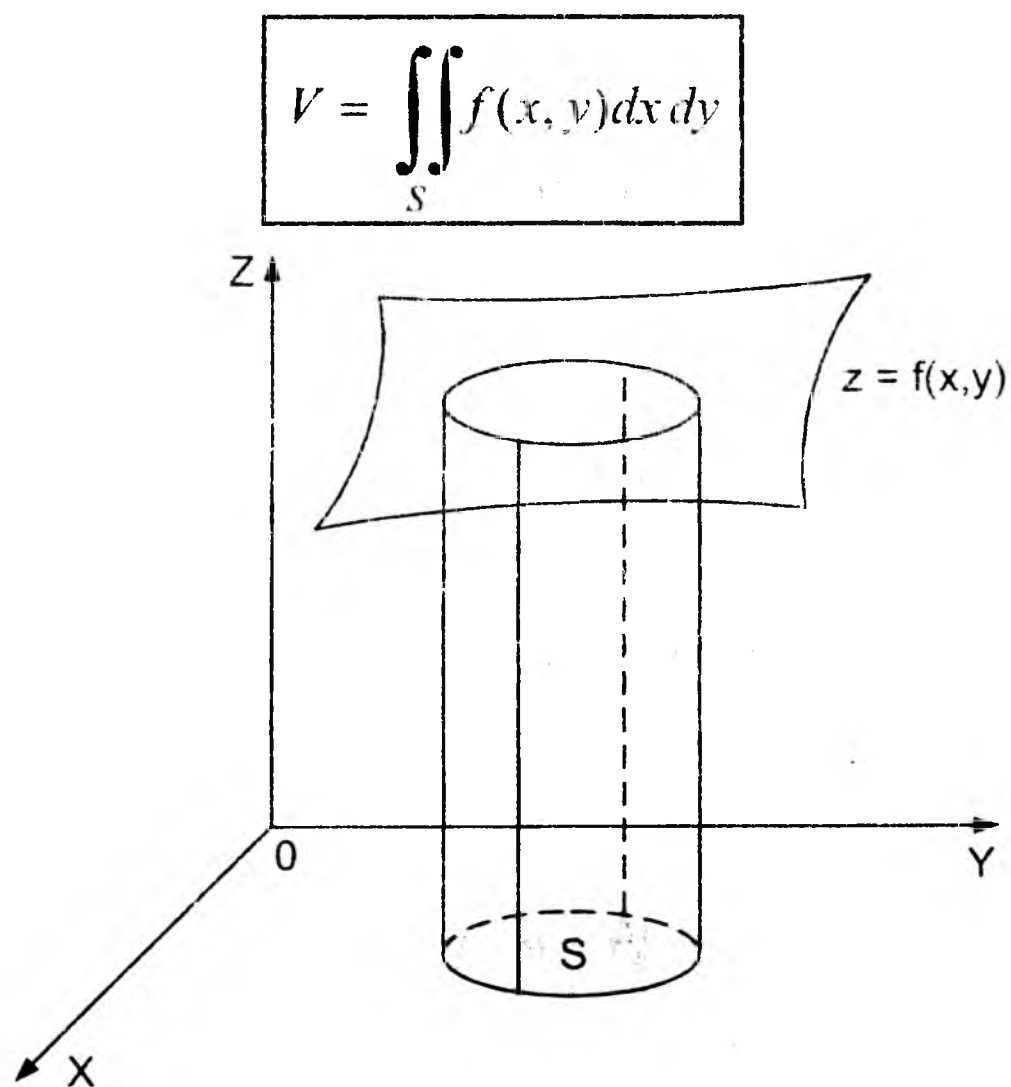
$$= -\frac{2}{9} u^{-1} - \frac{2}{9} u^{-1} = -\frac{4}{9u}$$

$$A = \iint_D dx dy = \iint_R |J(u,v)| du dv = \frac{4}{9} \iint_R \frac{du dv}{u} = \frac{4}{9} \int_{\alpha}^{\beta} dv \int_a^b \frac{du}{u}$$

$$= \frac{4}{9} \ln \frac{b}{a} (\beta - \alpha) = \frac{4(\beta - \alpha)}{9} \ln \frac{b}{a}$$

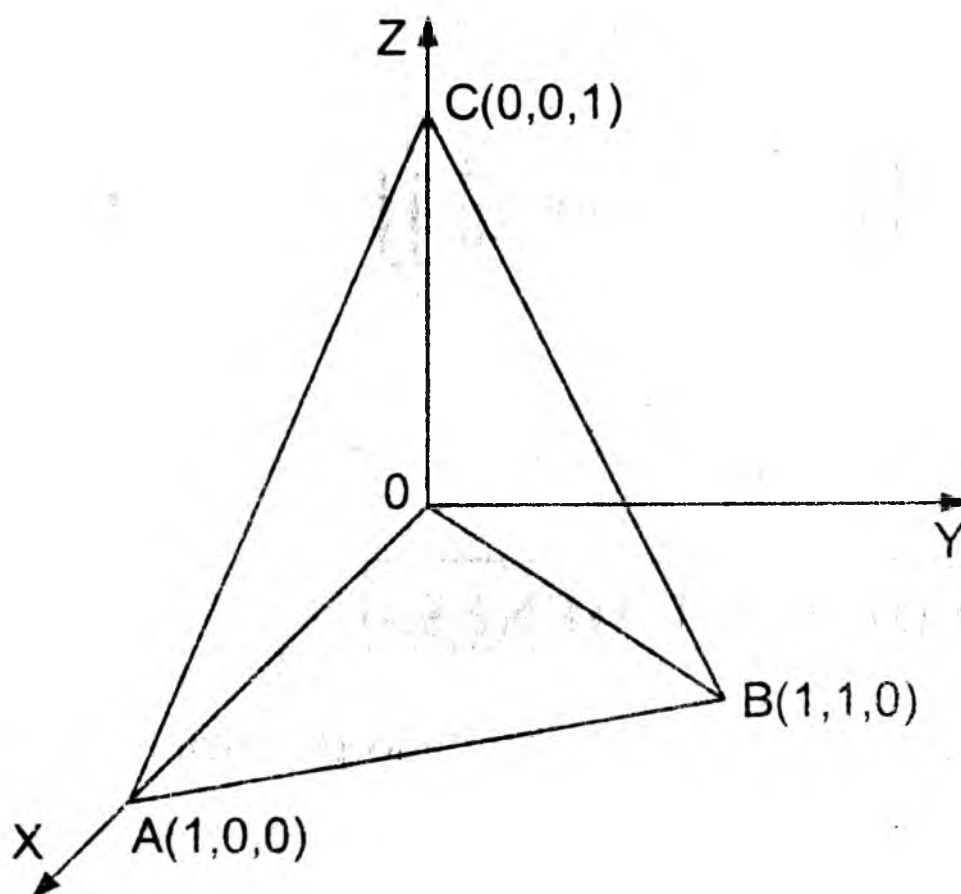
7.4. CÁLCULO DE VOLÚMENES.-

El volumen V de un cilindroide, limitado por arriba por la superficie continua $z = f(x,y)$, por abajo por el plano $z = 0$ y lateralmente por la superficie cilíndrica recta que corta en el plano XOY el recinto S es igual a:



- 2188** Expresar, por medio de la integral doble, el volumen de una pirámide cuyos vértices son $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$ y $C(0,0,1)$, colocar los límites de integración.

Desarrollo



$$V = \iint_S f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 (1-x) dx = \int_0^1 dx \int_0^x (1-x) dy$$

En los problemas 2189 – 2192, hay que dibujar los cuerpos, cuyos volúmenes se expresan por las integrales dobles que se dan.

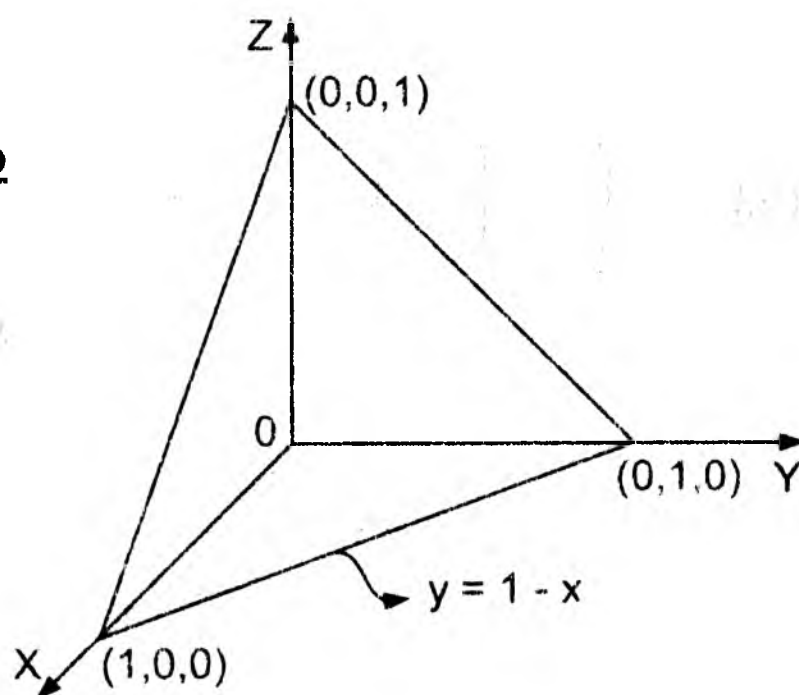
2189

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy$$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}$

La parte sombreada es la proyección del sólido.



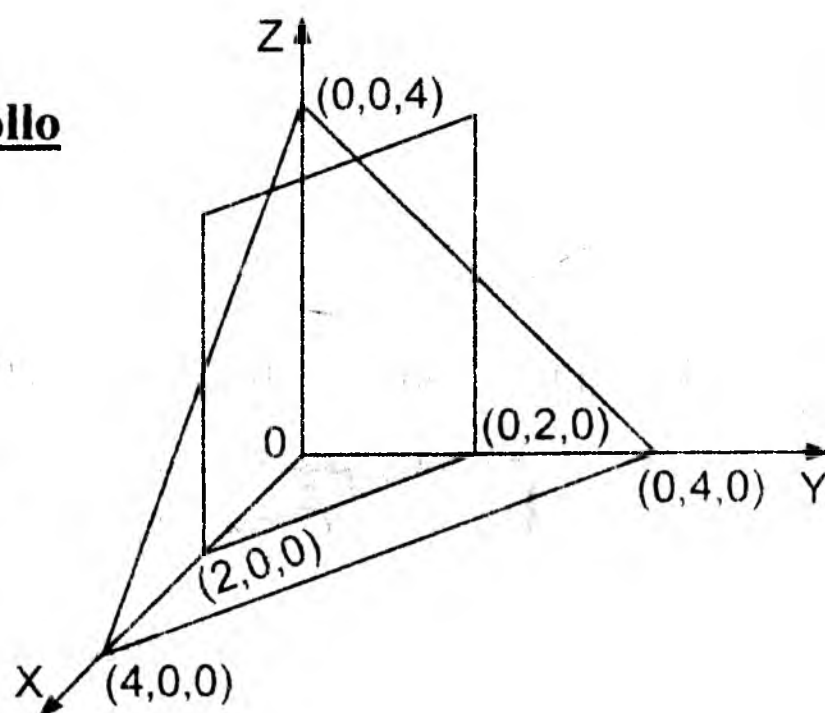
2190

$$\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4-x-y) dy$$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2-x \end{cases}$

La parte sombreada de la proyección del sólido

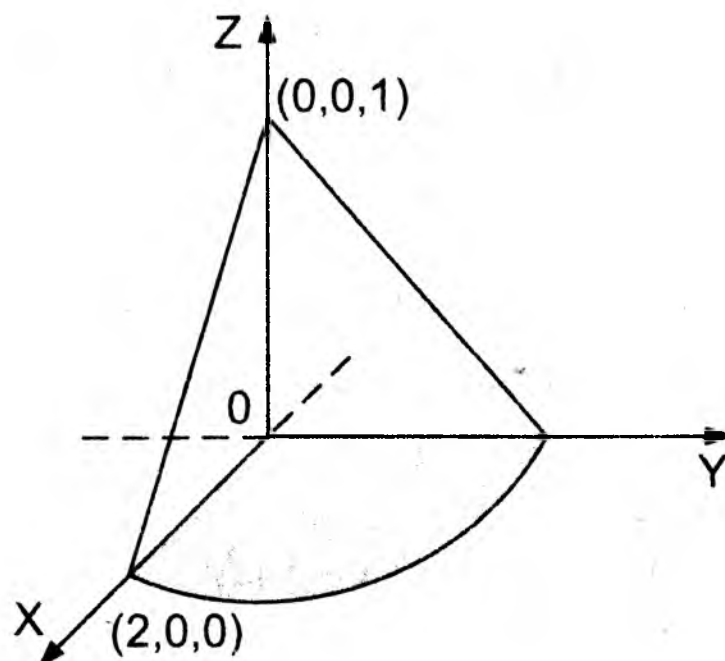


2191

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x) dy$$

Desarrollo

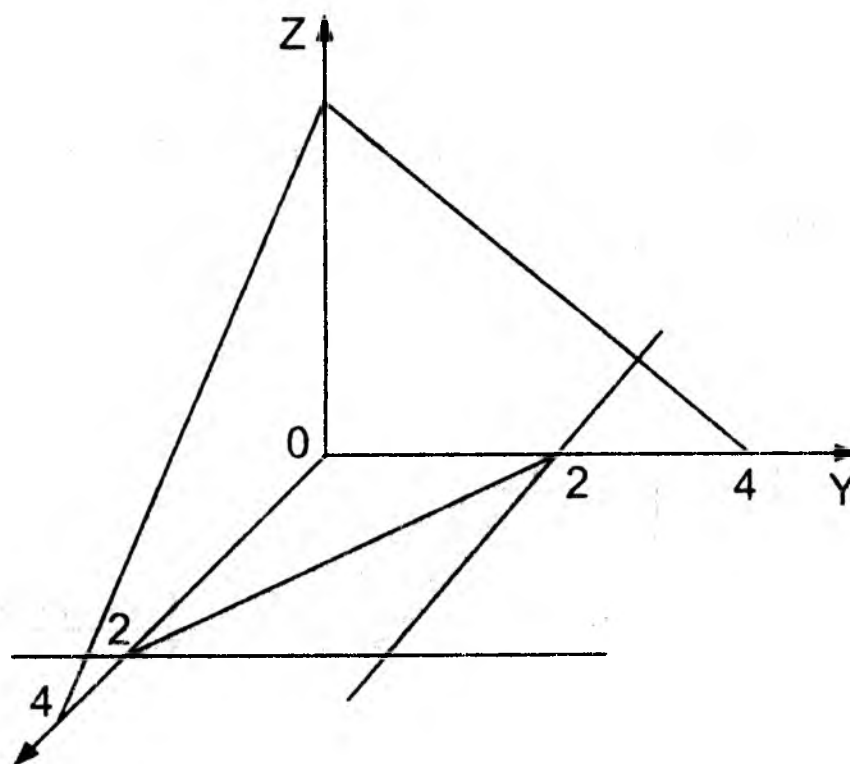
Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$



2192 $\int_0^2 dx \int_{2-x}^2 (4-x-y) dy$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2-x \leq y \leq 2 \end{cases}$



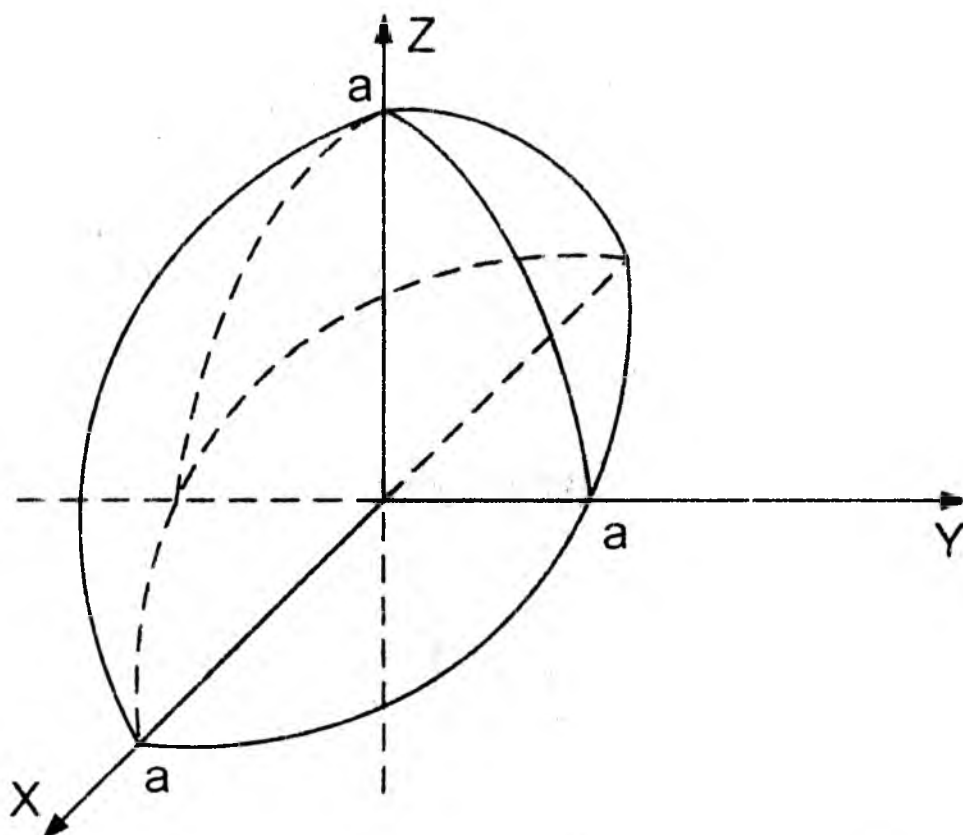
2193 Dibujar el cuerpo, cuyo volumen expresa la integral

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy, \text{ y basándose en razonamiento geométricos,}$$

hallar el valor de esta integral.

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2} \end{cases}, \quad z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$



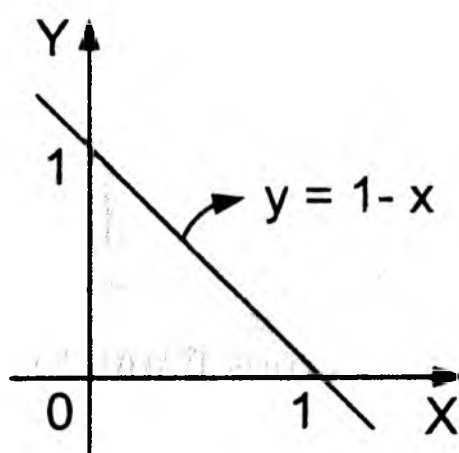
$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi r^2 h}{3} \right) \text{ pero } h = r = a \text{ por lo tanto } V = \frac{\pi a^3}{6}$$

- 2194** Hallar el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2 + 1$, el plano $x + y = 1$ y los planos coordenados.

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} x = 0, y = 0, z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ planos coordenados

proyectado al plano XY se tiene:

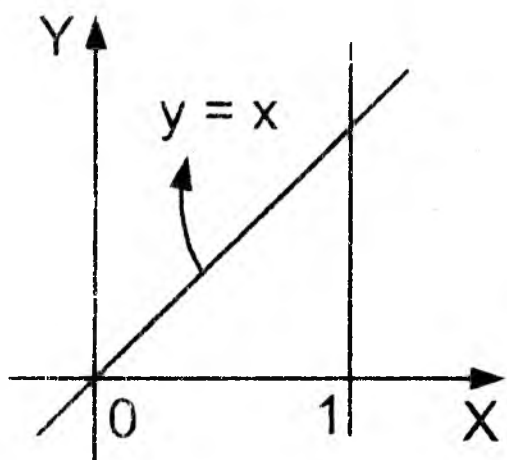


$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1) dy = \int_0^1 \left[-2x^3 + 2x^2 - x + 1 + \frac{(1-x)^3}{3} \right] dx$$

$$= \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{(1-x)^4}{12} \right] = \frac{3}{4}u^3$$

- 2195** Un cuerpo está limitado por el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y los planos $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$ calcular su volumen.

Desarrollo



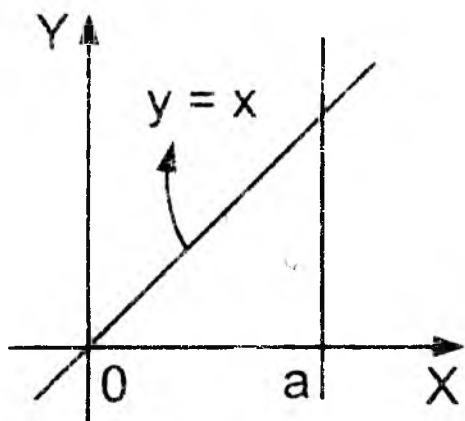
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 - y^2) dy = \int_0^1 \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_0^x dx \\ &= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^3 dx \end{aligned}$$

$$V = \frac{x^4}{6} \bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\therefore V = \frac{1}{6}u^3$$

- 2196** Un cuerpo está limitado por el cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ y los planos $y = 0$, $z = 0$, $y = x$ calcular su volumen:

Desarrollo



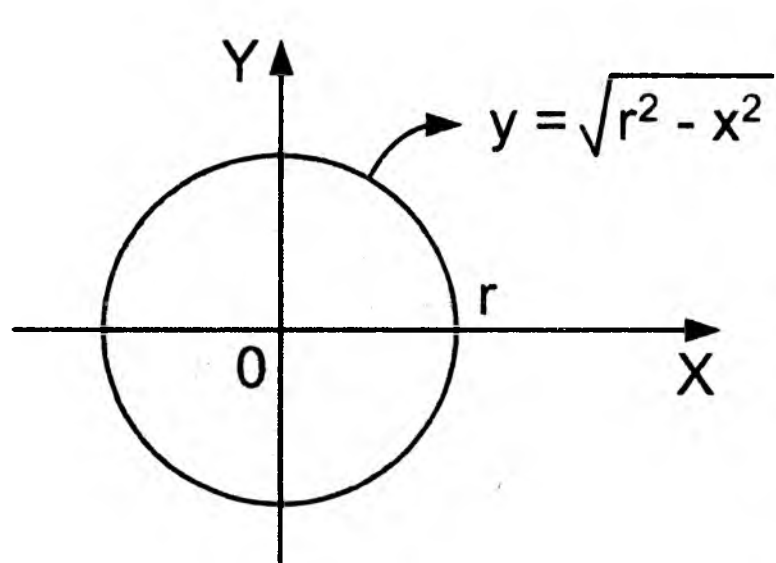
$$V = \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dy$$

$$V = \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^3}{3}u^3$$

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies siguientes:

- 2197** $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$

Desarrollo



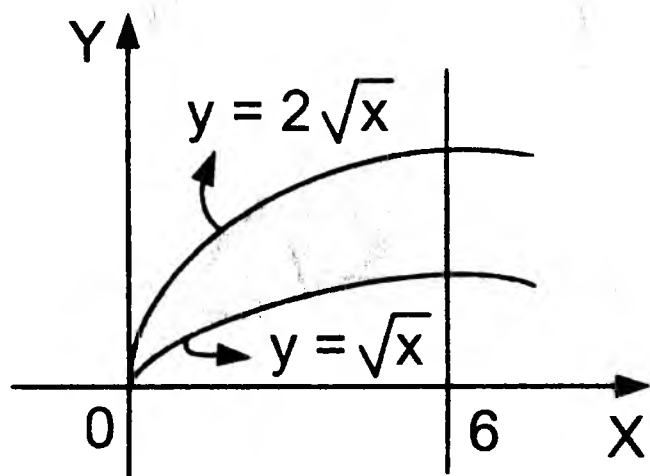
$$V = 4 \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{y^2}{a} dy$$

$$V = 4 \int_0^r \frac{1}{3a} (r^2 - x^2) \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$V = \frac{\pi r^4}{4}$$

2198 $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$

Desarrollo

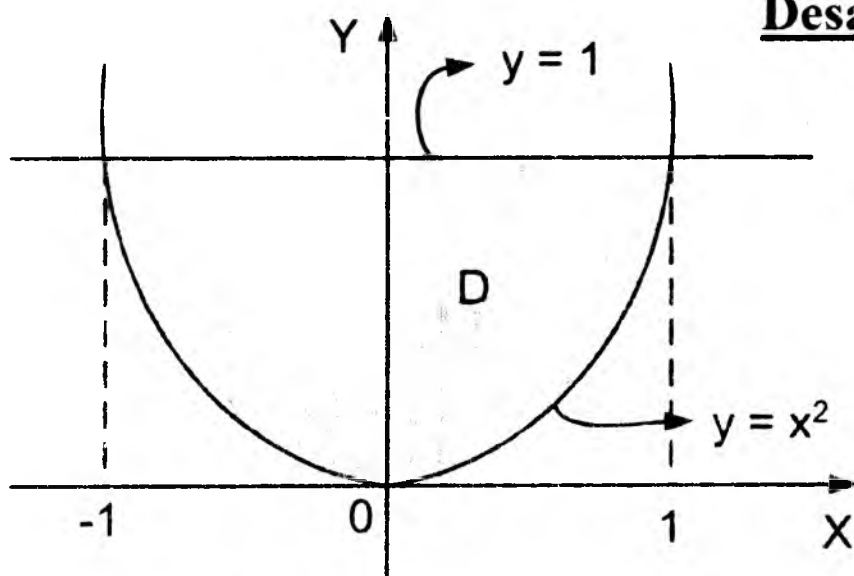


$$V = \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6 - x) dy$$

$$V = \int_0^6 (6 - x) \sqrt{x} dx = \frac{48}{5} \sqrt{6}$$

2199 $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$

Desarrollo



$$V = \iint_D z dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx$$

$$V = \int_{-1}^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^1 dx$$

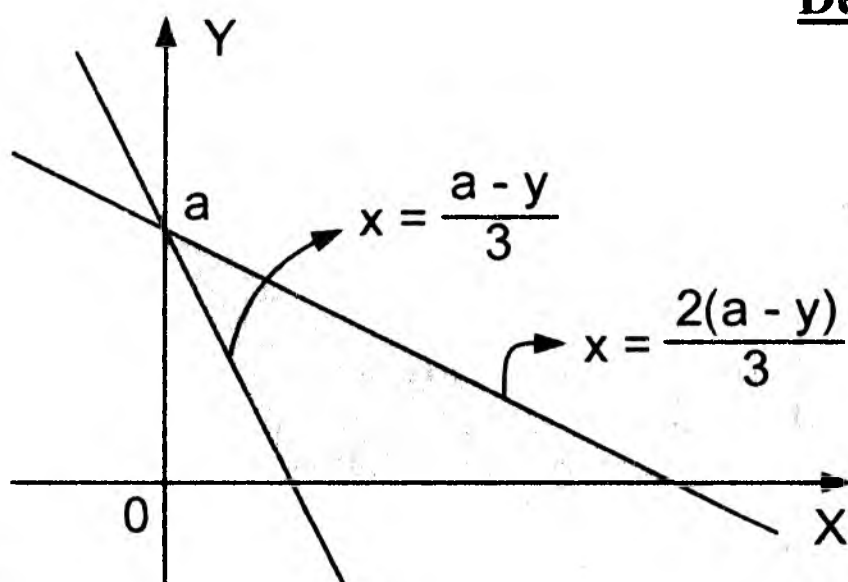
$$V = \int_{-1}^1 \left[\left(x^2 + \frac{1}{3} \right) - \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) \right] dx$$

$$V = \left(-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(-\frac{1}{21} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= -\frac{2}{21} - \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{88}{105}$$

2200 $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\frac{3x}{2} + y = a$, $y = 0$, $z = 0$

Desarrollo



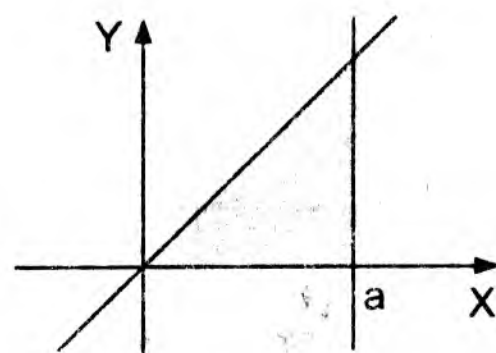
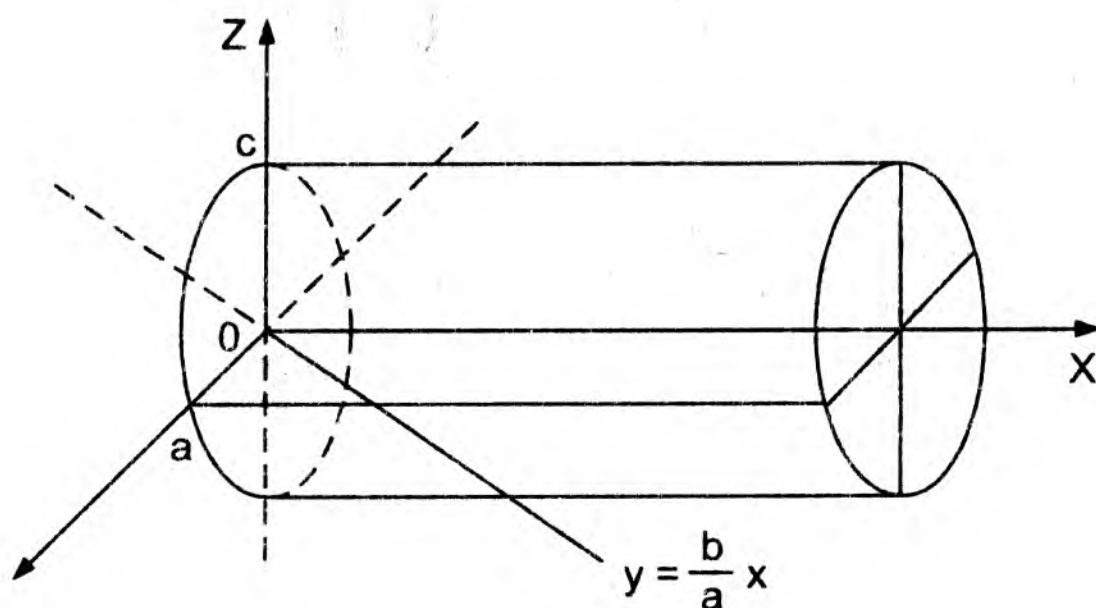
$$V = \int_0^a \left(\int_{\frac{a-y}{3}}^{\frac{2(a-y)}{3}} (a-x-y) dx \right) dy$$

$$V = \int_0^a \left[(a-y)x - \frac{x^2}{2} \right] \Big|_{\frac{a-y}{3}}^{\frac{2(a-y)}{3}} dy$$

$$V = \int_0^a \frac{(a-y)^2}{6} dy = -\frac{(a-y)^3}{18} \Big|_0^a = -(0 - \frac{a^3}{18}) = \frac{a^3}{18} \quad \therefore V = \frac{a^3}{18}$$

2201 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$

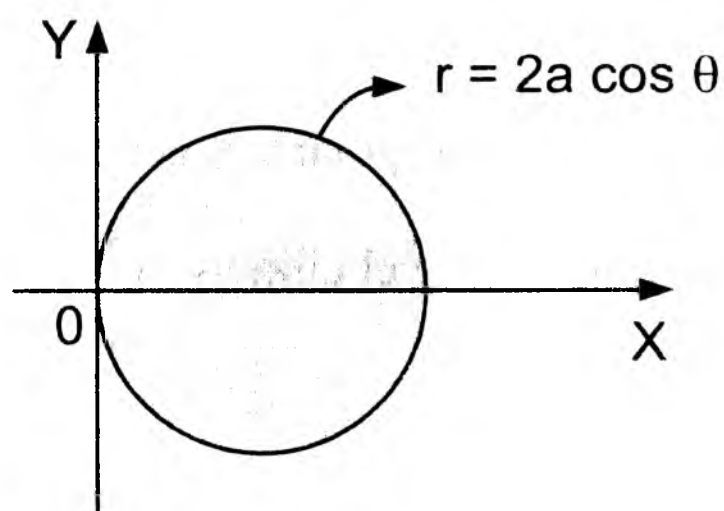
Desarrollo



$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}x} z \, dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}x} \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^a \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} y \Big|_0^{\frac{b}{a}x} dx = \frac{bc}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} x \, dx = \frac{abc}{3}
 \end{aligned}$$

2202 $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ ($\alpha > \beta$)

Desarrollo



Proyectando al plano XY se tiene:

$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = a^2$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow dx \, dy = r \, dr \, d\theta$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \cos \theta} (\alpha - \beta) r \cos \theta \, r \, dr \right) d\theta$$

$$V = (\alpha - \beta) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \cos \theta} r^2 \cos \theta \, dr \right) d\theta = (\alpha - \beta) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3 \cos \theta}{3} \Big|_0^{2a \cos \theta} d\theta$$

$$= (\alpha - \beta) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8a^3 \cos^4 \theta}{3} d\theta = \frac{8a^3 (\alpha - \beta)}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{8a^3 (\alpha - \beta)}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \frac{2a^3 (\alpha - \beta)}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta$$

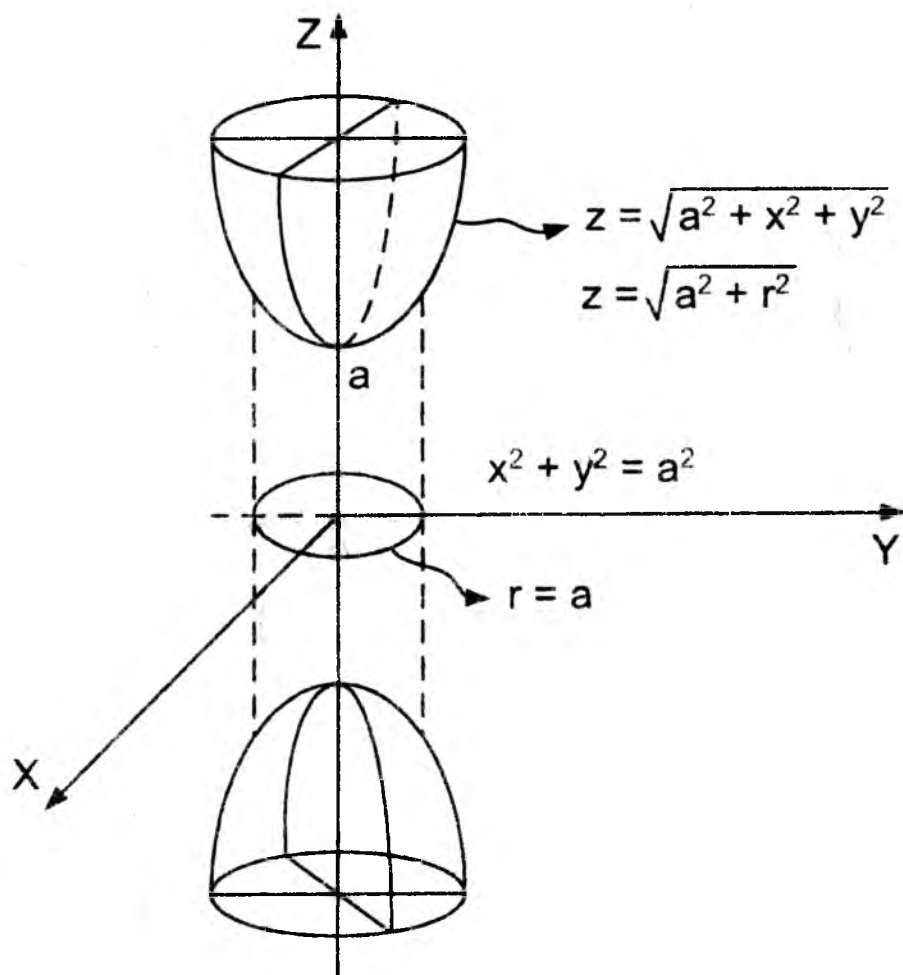
$$\begin{aligned}
&= \frac{2a^3(\alpha - \beta)}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \frac{2a^3(\alpha - \beta)}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \frac{2a^3(\alpha - \beta)}{3} \left[\frac{3\theta}{2} + \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8} \right] \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2a^3(\alpha - \beta)}{3} \left[\left(\frac{3\pi}{4} + 0 \right) - \left(-\frac{3\pi}{4} + 0 \right) \right] \qquad \therefore V = a^3 \pi (\alpha - \beta)
\end{aligned}$$

En los problemas 2203 – 2211 empléense coordenadas polares y generalizados.

- 2203** Hallar el volumen total del espacio comprendido entre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$

Desarrollo

Mediante coordenadas polares se tiene: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow dx dy = r dr d\theta$

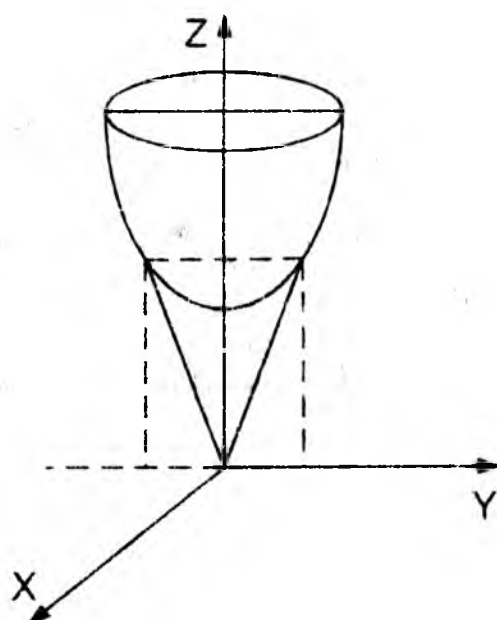


$$V = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \sqrt{a^2 + r^2} r dr \right) d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a d\theta$$

$$V = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (2a^2 \sqrt{2}a - a^3) d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (2\sqrt{2} - 1)a^3 d\theta = \frac{4a^3 \pi}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

- 2204** Hallar el volumen total del espacio comprendido entre el cono $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 + z^2 = -a^2$

Desarrollo

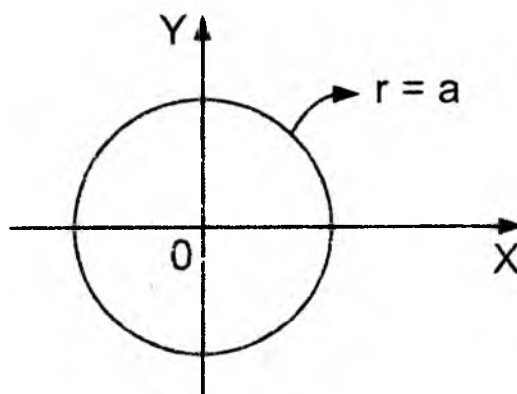


Proyectando al plano XY

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2) = z^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 - a^2 \end{cases}$$

$$2(z^2 - a^2) = z^2 \Rightarrow z = \sqrt{2}a$$

Luego $x^2 + y^2 = a^2$



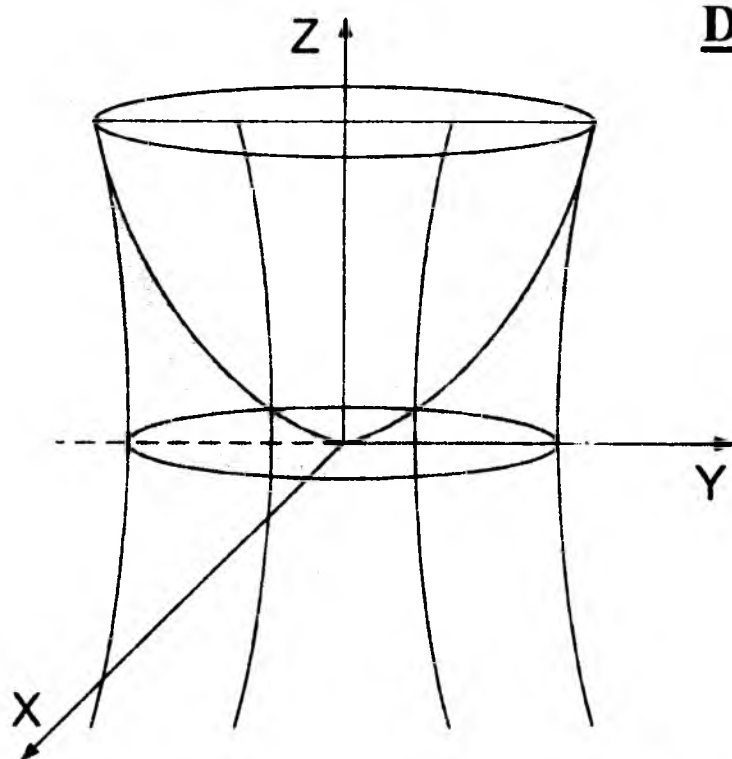
$$V = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \sqrt{r^2 + a^2} - \sqrt{2}r \right) r dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} (r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}r^3}{3} \right] \Big|_0^a d\theta$$

$$V = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} [(2a^2 \sqrt{2}a - \sqrt{2}a^3) - (a^3 - 0)] d\theta$$

$$V = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (a^3 \sqrt{2} - a^3) d\theta = \frac{4a^3 \pi}{3} (\sqrt{2} - 1)$$

- 2205** Hallar el volumen limitado por la superficie $2ax = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

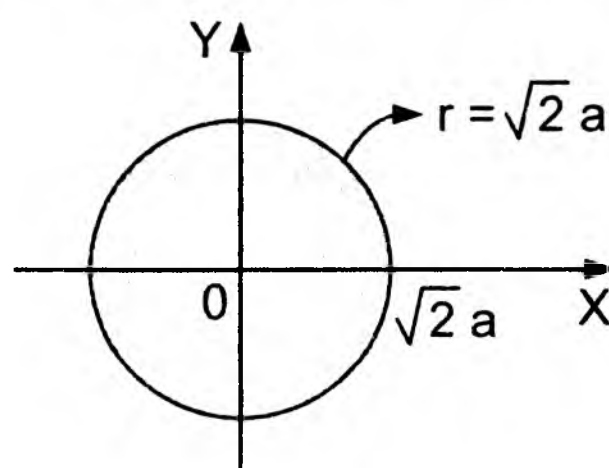
Desarrollo



Proyectando la intercepción al plano XY

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 + a^2 \\ x^2 + y^2 = 2az \end{cases}$$

$$z^2 + a^2 = 2az \Rightarrow (z - a)^2 = 0 \Rightarrow z = a$$



Luego se tiene $x^2 + y^2 = 2a^2$

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}a} \left(\frac{r^2}{2a} \right) r dr \right) d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{8a} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}a} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4a^4}{8a} d\theta = \frac{a^3}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi a^3$$

- 2206** Determinar el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Desarrollo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \quad \text{proyectando al plano XY, } z = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$V = 2 \iint_D z \, dx \, dy = 2 \iint_R c \sqrt{1-u^2-v^2} |J(u,v)| \, du \, dv$$

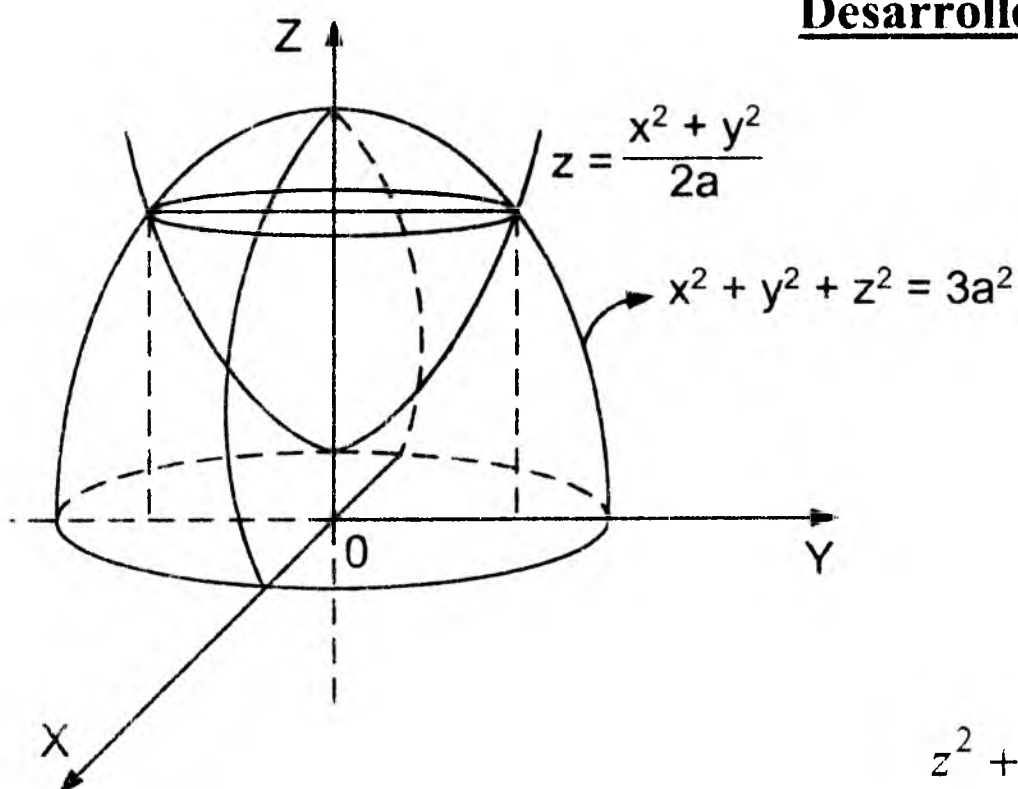
$$V = 2abc \iint_R \sqrt{1-u^2-v^2} \, du \, dv$$

$$V = 2abc \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1-r^2} r \, dr \right) d\theta = 2abc \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 d\theta$$

$$V = -\frac{2abc}{3} \int_0^{2\pi} (0-1) d\theta \quad \therefore V = \frac{4abc}{3} \pi$$

- 2207** Hallar el volumen del sólido limitado por la hiperboloide $2ax = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ (se sobre entiende el volumen situado dentro del paraboloide).

Desarrollo

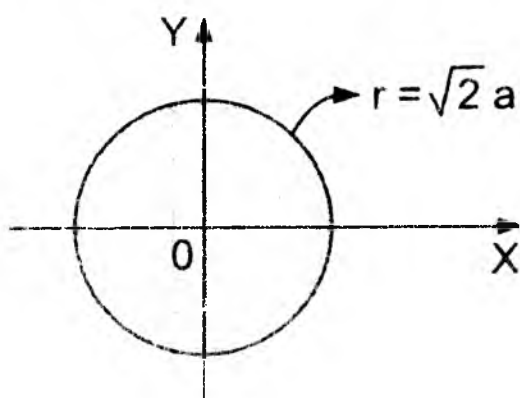


Calculando la proyección

$$\begin{cases} 2ax = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \end{cases}$$

$$z^2 + 2az - 3a^2 = 0 \Rightarrow (z + 3a)(z - a) = 0$$

de donde $z = a$ por lo tanto se tiene $x^2 + y^2 = 2a^2$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow dx \, dy = r \, dr \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}a} (z_2 - z_1) dr \right) d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}a} \left(\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^2}{2a} \right) r dr \right) d\theta$$

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}a} \left[(3a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} r - \frac{r^3}{2a} \right] dr \right) d\theta$$

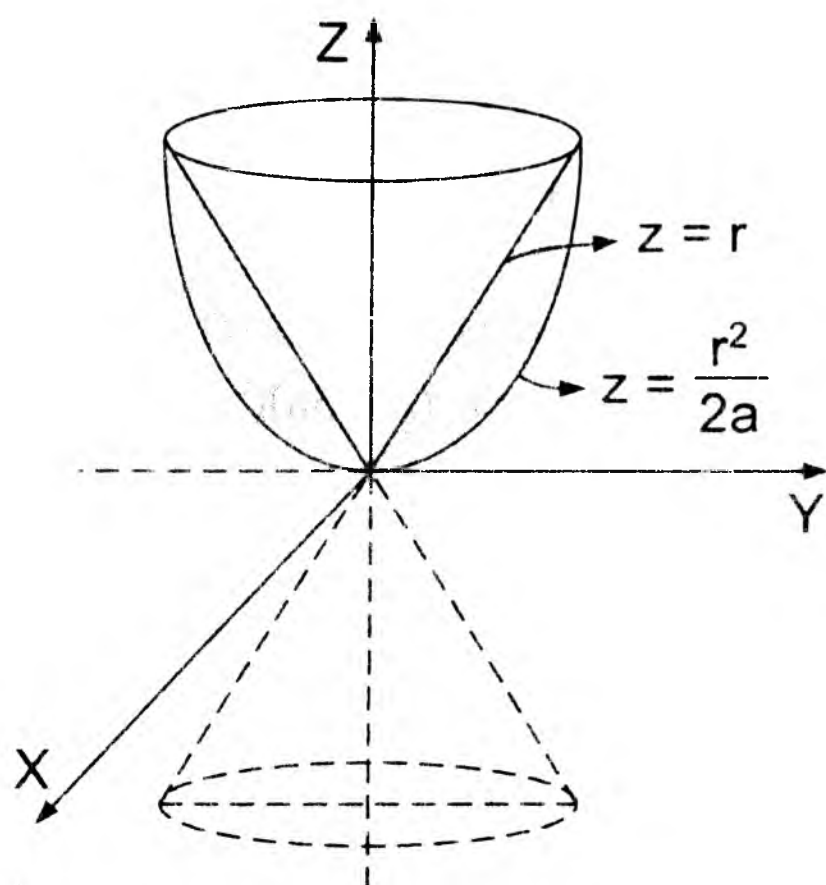
$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3} (3a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{8a} \right) \bigg|_0^{\sqrt{2}a} d\theta$$

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(-\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right) - (-\sqrt{3}a^3) \right] d\theta$$

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{3} - \frac{5}{6} \right) a^3 d\theta = \frac{6\sqrt{3} - 5}{3} a^3 \pi$$

- 2208** Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XOY, el cilindro $x^2 + y^2 = 2az$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$

Desarrollo



Proyectando el plano XY

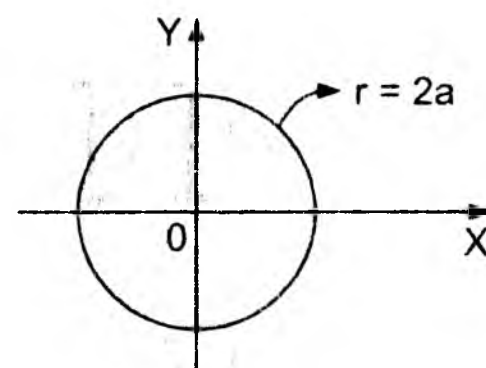
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2az \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow z = 2a$$

por lo tanto $x^2 + y^2 = 4a^2$

$$V = \iint_D (z_2 - z_1) dx dy$$

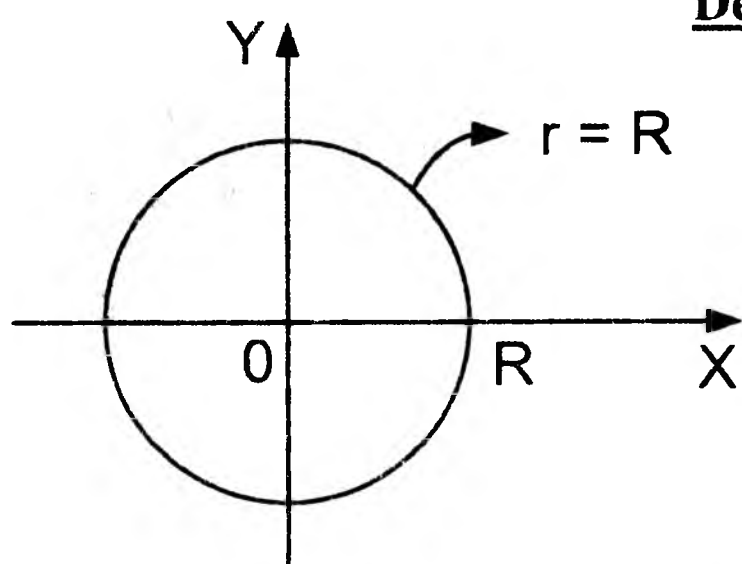
$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2a} \left(r - \frac{r^2}{2a} \right) r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8a} \right) \Big|_0^{2a} d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\frac{8a^3}{3} - \frac{2a^3}{3} \right) d\theta = \frac{2a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4a^3\pi}{3}$$



- 2209** Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XY, la superficie $z = ae^{-x^2-y^2}$ y el círculo $x^2 + y^2 = R^2$

Desarrollo



La proyección sobre el plano XY es

$$x^2 + y^2 = R^2$$

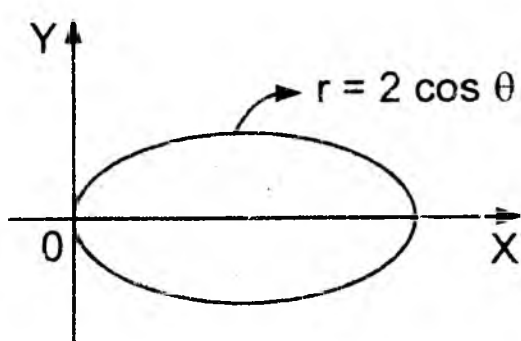
$$\iint_D z dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R ae^{-r^2} r dr \right) d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{ae^{-r^2}}{2} \right) \Big|_0^R d\theta = -\frac{a}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-R^2} - 1) d\theta = \frac{1 - e^{-R^2}}{2} a \cdot 2\pi$$

$$\therefore V = a\pi(1 - e^{-R^2})$$

- 2210** Calcular el volumen del sólido limitado por el plano XY el paraboloide

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \text{ y el cilindro } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$$



Desarrollo

$$\text{Sean } \begin{cases} x = ar(1 + \cos\theta) \\ y = br \sin\theta \end{cases} \Rightarrow dx dy = abr dr d\theta$$

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} ab r^2 \cdot r dr \right) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab(16) \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta$$

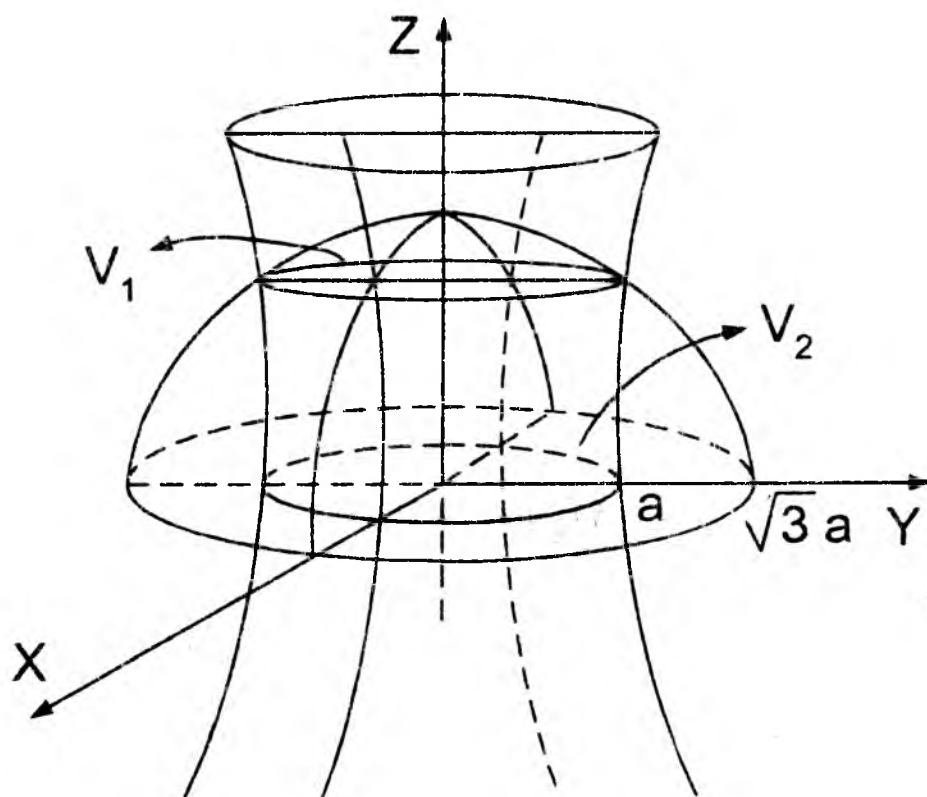
$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab(1+2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \left(1+2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2} \right) d\theta$$

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2} \right) d\theta = 2ab \left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V = 2ab \left[\frac{3\pi}{4} + 0 \right] = \frac{3ab\pi}{2}$$

- 2211** ¿En qué razón divide el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ al volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$?

Desarrollo



$$V_1 = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\sqrt{a}} \sqrt{r^2 - a^2} r dr \right) d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}$$

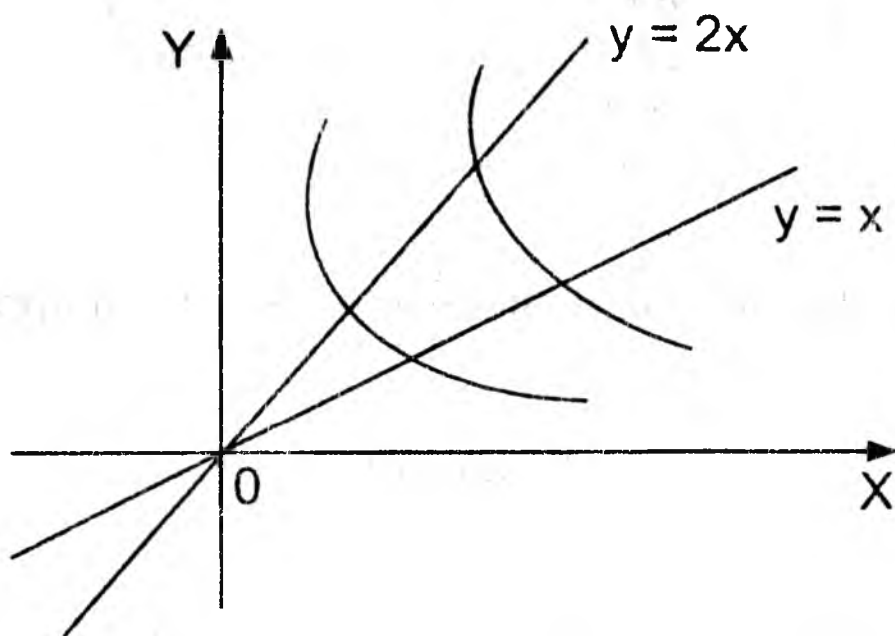
$$V_2 = 4 \int_{\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{a}{\sin \theta}}^{2\sqrt{a}} \sqrt{3a^2 - r^2} r dr \right) d\theta = \frac{(6\sqrt{3} - 8)\pi a^3}{3}$$

Luego $V_1 + V_2 = \frac{\pi a^3}{3} (6\sqrt{3} - 4)$ por lo tanto la razón que divide al volumen de

la esfera entre el hiperboloide es: $\frac{V_1 + V_2}{V_1} = \frac{3\sqrt{3} - 2}{2}$

- 2212** Hallar el volumen d el sólido limitado por las superficies $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 0$ ($x > 0$, $y > 0$)

Desarrollo



$$\begin{cases} xy = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow u = xy \text{ de donde } 1 \leq u \leq 2$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{y}{x} \text{ de donde } 1 \leq v \leq 2$$

$$\text{además } \begin{cases} xy = u \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases} \text{ y el jacobiano es: } J(u, v) = \frac{1}{2v}$$

$$V = \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{uv} \right) |J(u, v)| dv \right) du = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{uv} \right) dv \right) du$$

$$V = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v^3}} + \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \right) dv \right) du = \frac{\sqrt{2}}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

7.5. CÁLCULO DE AREAS DE SUPERFICIES.-

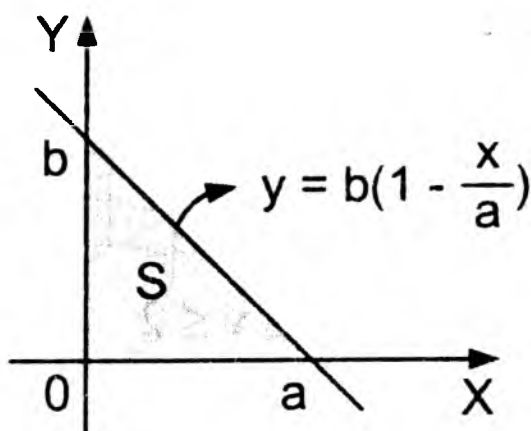
El área A de una superficie regular $z = f(x, y)$, que tenga como proyección en el plano XY un recinto S es igual a:

$$A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

- 2213** Hallar el área de la parte del plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, comprendida entre los planos coordenados.

Desarrollo

Proyectando al plano XY se tiene: $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$



$$z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b} \end{cases}$$

$$A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

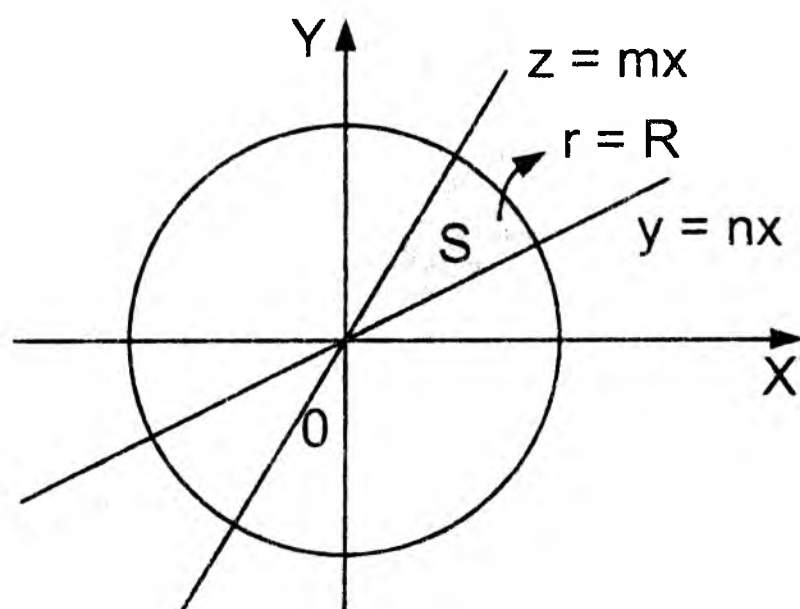
$$A = \int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} dy \right) dx = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + (a^2 + b^2)c^2}{a^2 b^2}} \int_0^a b\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx$$

$$A = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(1 + c^2)}}{ab} \left(bx - \frac{b}{2a} x^2 \right) \Big|_0^a = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(1 + c^2)}}{ab} \left(ab - \frac{ab}{2} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(1 + c^2)}$$

- 2214** Hallar el área de la parte de superficie del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, ($z \geq 0$) comprendida entre los planos $z = mx$ y $z = nx$ ($m > n > 0$)

Desarrollo



Proyectando al plano XZ se tiene:

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ de donde } y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

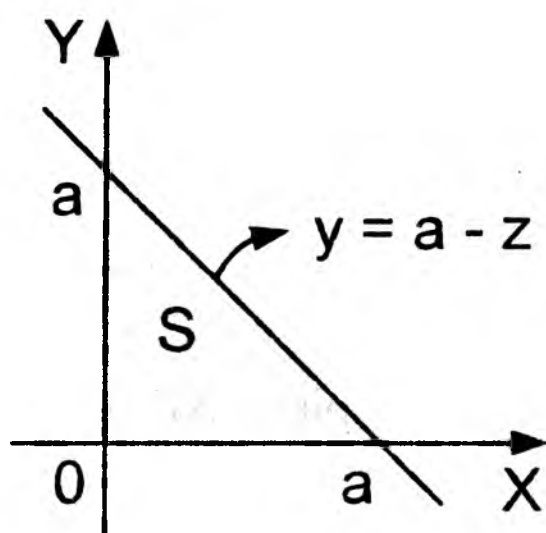
$$A = \iint_S \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx dz = \iint_S \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dz$$

$$A = 4 \int_0^R \left(\int_{nx}^{mx} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dz \right) dx = 4R(m-n) \int_0^R \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dz$$

$$A = 4R(m-n)(-\sqrt{R^2 - x^2}) \Big|_0^R \quad \therefore A = 4R^2(m-n)$$

- 2215** Calcular el área de la parte de la superficie del cono $x^2 - y^2 = z^2$, situada en el primer octante y limitada por el plano $y + z = a$.

Desarrollo



$$y = a - z$$

$$x^2 - y^2 = z^2 \Rightarrow x = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

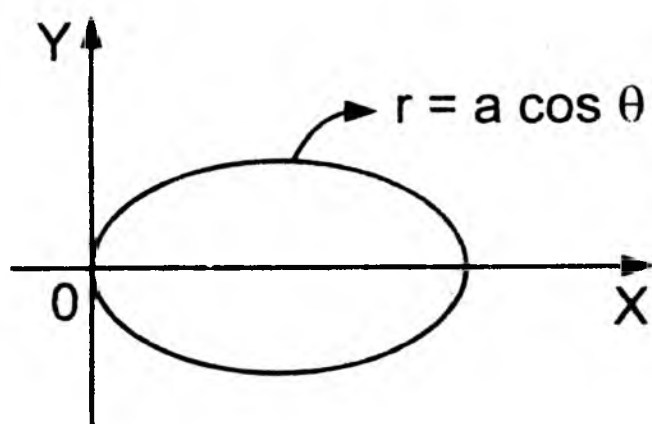
$$A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dz = A = \iint_S \sqrt{2} dy dz$$

$$A = \sqrt{2} \int_0^a \left(\int_0^{a-z} dy \right) dz = \sqrt{2} \int_0^a (a - z) dz = \sqrt{2} \left(az - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}$$

- 2216 Calcular el área de la parte de superficie del cilindro $x^2 + y^2 = ax$, cortada del mismo por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Desarrollo

Proyectando al plano XY, $(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$



Como $x^2 + y^2 = ax \Rightarrow y = \sqrt{ax - x^2}$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

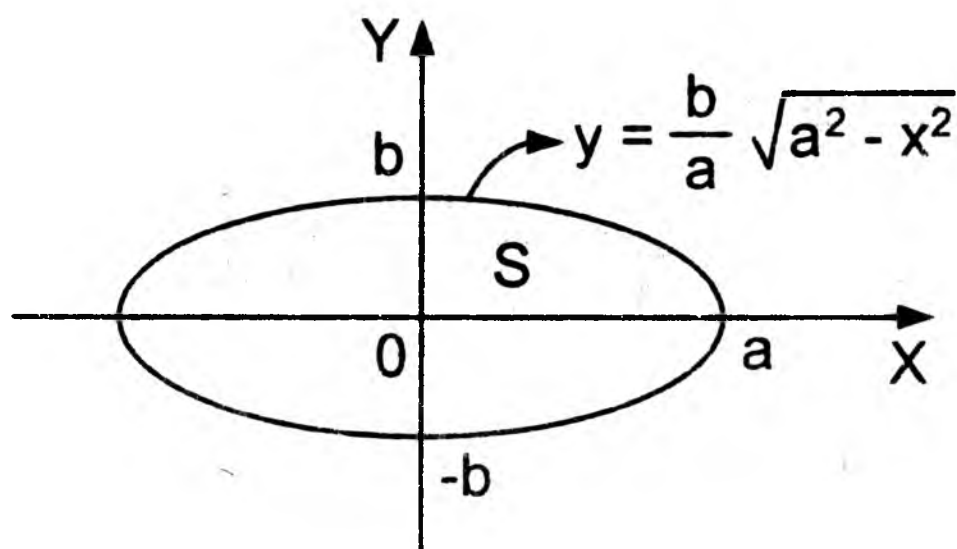
La intersección entre el cilindro y la esfera es:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ax \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow ax + z^2 = a^2$$

$$A = 4 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - ax}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz \right)$$

$$A = 4 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - ax}} \frac{dz}{\sqrt{ax - x^2}} \right) dx = 2a \int_0^a x^{-\frac{1}{2}} dx = 4a^2$$

- 2217 Calcular el área de la parte de superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, cortada por la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Desarrollo

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

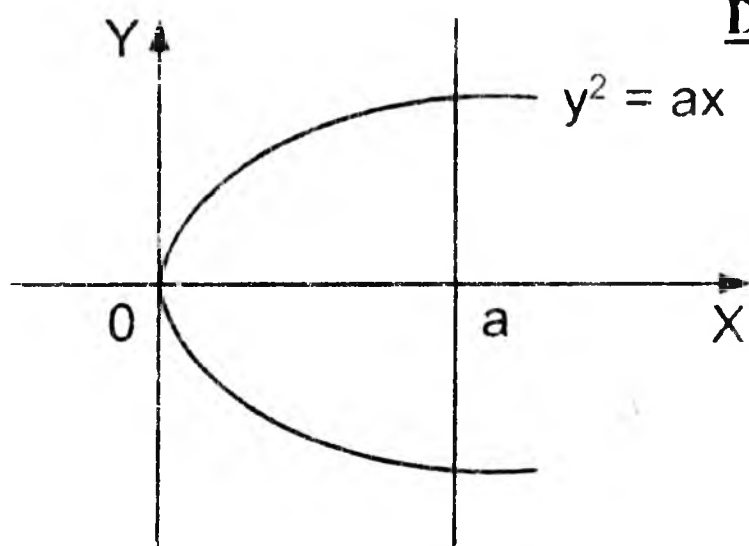
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$A = 8 \iint_S \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$A = 8 \int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right) dx = 8a^2 \arcsen\left(\frac{b}{a}\right)$$

- 2218** Calcular el área de la parte de superficie del paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$, comprendida entre el cilindro $y^2 = ax$ y el plano $x = a$.

Desarrollo

$$\begin{cases} y^2 = ax \\ y^2 + z^2 = 2ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{ax} \\ z = \sqrt{2ax - y^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2ax - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{2ax - y^2}}$$

$$A = 4 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{ax}} \sqrt{1 + \frac{a^2}{2ax - y^2} + \frac{y^2}{2ax - y^2}} dy \right) dx$$

$$A = 4 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{ax}} \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}} dy \right) dx = 4 \int_0^a \sqrt{2ax-a^2} \operatorname{arcsen} \frac{y}{\sqrt{2ax}} \bigg|_0^{\sqrt{ax}} dx$$

$$A = 4 \int_0^a (2ax+a^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) dx = \pi \int_0^a (2ax+a^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$A = \frac{\pi}{3a} (2ax+a^2)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^a = \frac{\pi a^2}{3} (3\sqrt{3}-1)$$

- 2219** Calcular el área de la parte de superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ comprendido en el plano XY y el cono $x^2 + y^2 = z^2$

Desarrollo

$$x^2 + y^2 = 2ax \Rightarrow y = \pm \sqrt{2ax-x^2} \text{ de donde } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

calculando la intercepción se tiene:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow z^2 = 2ax \Rightarrow z = \pm \sqrt{2ax}$$

$$A = 2 \int_0^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ax}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2} dz \right) dx = 2 \int_0^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ax}} \sqrt{1 + \frac{(a-x)^2}{2ax-x^2}} dz \right) dx$$

$$A = 2 \int_0^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ax}} \frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}} dz \right) dx = 2a \int_0^{2a} \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax-x^2}} dx$$

$$A = 2\sqrt{2}\sqrt{a} \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2a-x}} = -4\sqrt{2a}\sqrt{a}(\sqrt{2a-x}) \bigg|_0^{2a}$$

$$A = -4\sqrt{2a}\sqrt{a}(0 - \sqrt{2a}) = 8a^2$$

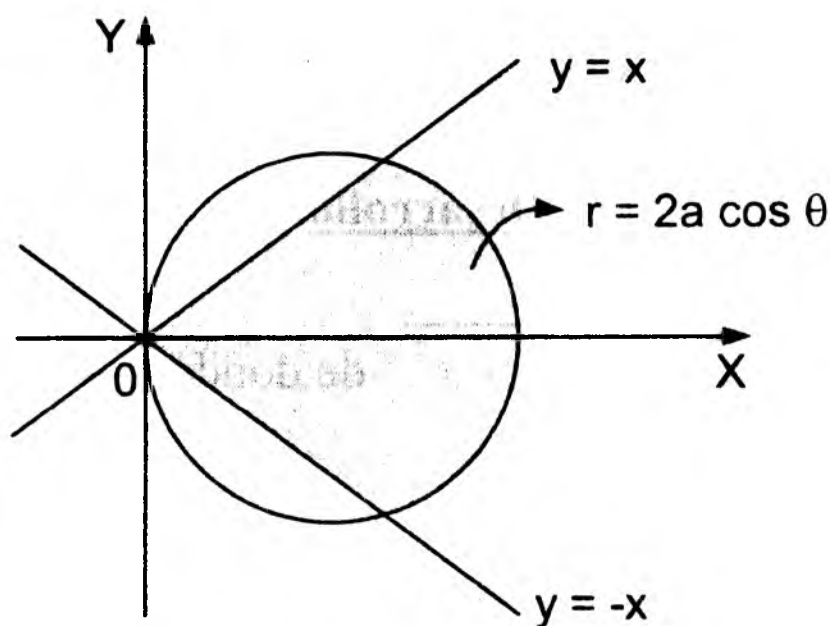
- 2220 Calcular el área de la parte de superficie del cono $x^2 - y^2 = z^2$ situado dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$

Desarrollo

La proyección de $x^2 - y^2 = z^2$ sobre el plano XY es

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = x, y = -x$$

$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$



$$z = \sqrt{x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$A = 4 \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 4 \iint_S \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{y^2}{x^2 - y^2}} dx dy$$

$$A = 4 \iint_S \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2a \cos \theta} \frac{r \cos \theta r dr}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}} \right) d\theta$$

$$A = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2a \cos \theta} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}} r dr \right) d\theta$$

$$A = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^{2a \cos \theta} d\theta = 8\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}} d\theta$$

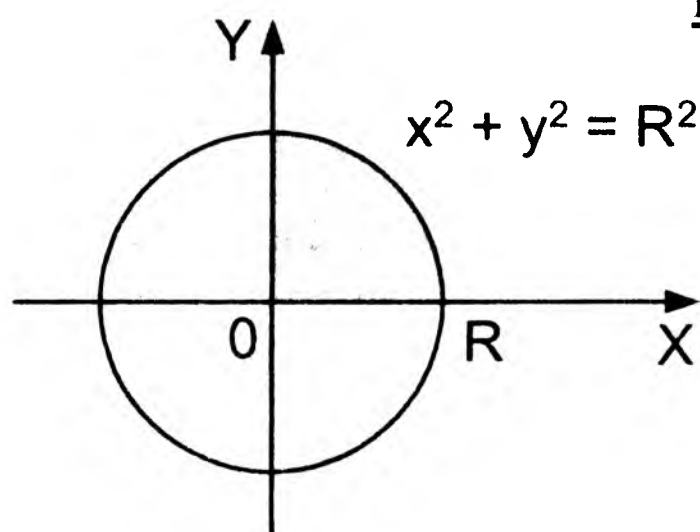
$$A = 8\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 \theta d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2 \theta}} = 8\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin^2 \theta)\cos \theta}{\sqrt{1-2\sin^2 \theta}} d\theta$$

$$z = \sin \theta \Rightarrow dz = \cos \theta d\theta \quad \text{para } \theta = 0, z = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = 8\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1-z^2)dz}{\sqrt{1-2z^2}} = 8a^2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) = 3\pi a^2$$

- 2221** Demostrar que las áreas de las partes de las superficies de los paraboloides $x^2 + y^2 = 2az$ y $x^2 - y^2 = 2az$ cortados por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ son iguales.

Desarrollo



Ecuación de la superficie es:

$$x^2 + y^2 = 2az \quad \text{de donde}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{a}$$

$$A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_S \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}} dx dy$$

$$A = \frac{1}{a} \iint_S \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy \quad \dots (1)$$

para la superficie $x^2 - y^2 = 2az$ de donde $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{a}$

$$A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_S \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}} dx dy$$

$$A = \frac{1}{a} \iint_S \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy \quad \dots (2)$$

Comparando (1) y (2) se tiene que (1) = (2) con lo cual queda demostrado.

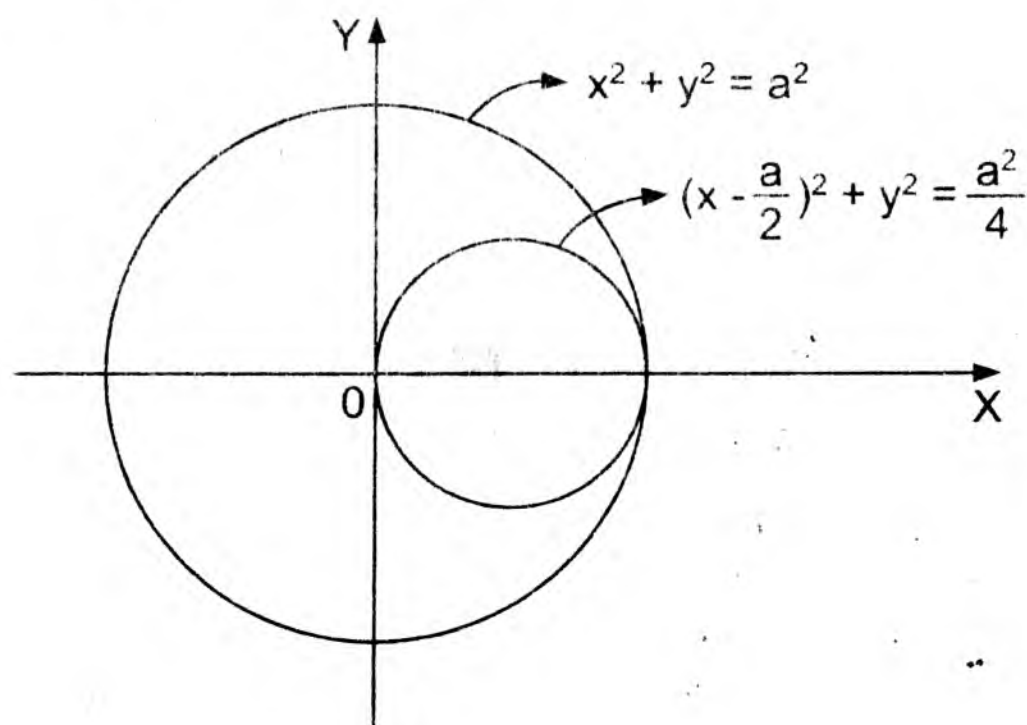
- 2222** Una esfera de radio a esta cortada por dos cilindros circulares cuyas bases tienen los diámetros iguales al radio de aquella y que son tangentes entre sí a lo largo de uno de los diámetros de la misma. Hallar el volumen y el área de la parte de superficie de la esfera que queda.

Desarrollo

La ecuación de la esfera de radio a es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{de donde}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$



$$A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) d\theta = 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

Superficie de la esfera cortada y la superficie de la esfera no cortada es:

$$A = 4\pi a^2 - 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 8a^2, \text{ ahora calculamos el volumen que queda.}$$

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(\int_0^{a \cos \theta} \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r dz \right) dr \right) d\theta$$

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(\int_0^{a \cos \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} dr \right) d\theta = \frac{16}{9} a^3$$

- 2223** En una esfera de radio a se ha cortado un orificio, con salida de base cuadrada, cuyo lado es igual también a a . El eje de este orificio coincide con el diámetro de la esfera. Hallar el área de la superficie de esta cortada por el orificio.

Desarrollo

La ecuación de la esfera de radio a es: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$\text{de donde } z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 + y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx \right) dy$$

$$= 8 \left[\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right) dx \right] = 8a \int_0^{\frac{a}{2}} \arcsen \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\frac{a}{2}} dx$$

$$A = 8a \int_0^{\frac{a}{2}} \arcsen\left(\frac{a}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dx = 9a^2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{5}$$

- 2224** Calcular el área de la parte de superficie helicoidal $z = c \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, situada en el primer octante y que está comprendido entre los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$

Desarrollo

$$z = c \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{cy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{cx}{x^2 + y^2}$$

$$A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_S \sqrt{1 + \frac{c^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{c^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2}} dx dy$$

$$A = \iint_S \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + c^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_a^b \frac{\sqrt{r^2 + c^2}}{r} r dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_a^b \sqrt{r^2 + c^2} dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r}{2} \sqrt{r^2 + c^2} + \frac{c^2}{2} \ln |r + \sqrt{r^2 + c^2}| \right] \Big|_a^b d\theta$$

$$= \frac{1}{2} [b\sqrt{b^2 + c^2} + c^2 \ln |b + \sqrt{b^2 + c^2}| - a\sqrt{a^2 + c^2} - c^2 \ln |a + \sqrt{a^2 + c^2}|] \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{4} [b\sqrt{b^2 + c^2} - a\sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \ln \left| \frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{a + \sqrt{a^2 + c^2}} \right|]$$

7.6. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DOBLE A LA MECANICA.-

1er. MASA Y MOMENTOS ESTÁTICOS DE LA LAMINAS.-

Si S es un recinto del plano XY , ocupado por una lamina, y $\rho(x,y)$, es la densidad superficial de dicha lamina en el punto (x,y) , la masa M de esta y sus momentos estáticos M_x y M_y con respecto a los ejes OX y OY se expresan por las integrales dobles.

$$M = \iint_S \rho(x,y) dx dy, \quad M_x = \iint_S y \rho(x,y) dx dy, \quad M_y = \iint_S x \rho(x,y) dx dy \dots (1)$$

Si la lamina es homogénea, $\rho(x,y) = \text{constante}$.

2do. COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS LAMINAS.-

Si $C(\bar{x}, \bar{y})$ es el centro de gravedad de una lamina se tiene:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

donde M es la masa de lamina y M_x , M_y sus momentos estáticos con respecto a los ejes de coordenadas.

Si la lamina es homogénea, en la fórmula (1) se puede poner $\rho = 1$.

3er. MOMENTOS DE INERCIA DE LAS LAMINAS.-

Los momentos de inercia de una lamina, con respecto a los ejes X , Y son iguales respectivamente a

$$I_x = \iint_S y^2 \rho(x, y) dx dy$$

$$I_y = \iint_S x^2 \rho(x, y) dx dy$$

... (2)

El momento de inercia de la lamina con respecto al origen de coordenadas.

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy = I_x + I_y$$

... (3)

poniendo $\rho(x, y) = 1$ en las fórmulas (2) y (3) obtenemos los momentos geométricos de inercia de las figuras planas.

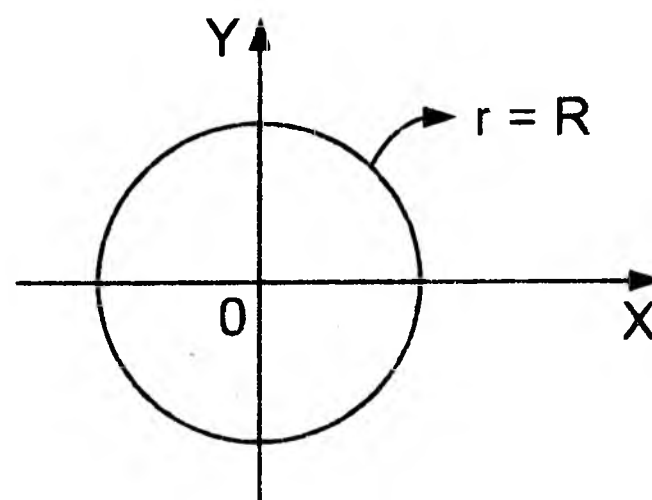
- 2225** Hallar la masa de una lamina circular de radio R , si su densidad es proporcional a la distancia desde el punto al centro e igual a δ en el borde de la lamina.

Desarrollo

Como la lamina es circular
entonces $x^2 + y^2 = R^2$

De acuerdo a las condiciones del

problema se tiene: $\rho(x, y) = \frac{\delta}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$

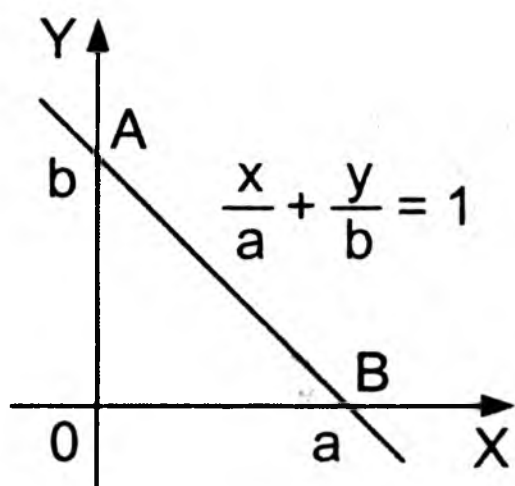


$$M = \iint_S \rho(x, y) dx dy = \iint_S \frac{\delta}{R} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\delta}{R} r \cdot r dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\delta}{R} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R d\theta = \frac{\delta}{3R} R^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi\delta}{3} R^2$$

- 2226** Una lamina tiene forma de triángulo rectángulo con catetos $OB = a$ y $OA = b$; su densidad en cualquier punto es igual a la distancia desde este al cateto OA . Hallar los momentos estáticos de la lamina con respecto a los catetos OA y OB .

Desarrollo



$$(\rho(x,y) = x)$$

$$M_x = \iint_S y \rho(x,y) dx dy$$

$$M_x = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{ab-bx}{a}} xy dy \right) dx = \int_0^a \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{\frac{ab-bx}{a}} dx = \frac{1}{2} \int_0^a x \left(\frac{ab-bx}{a} \right)^2 dx$$

$$= \frac{b^2}{2a^2} \int_0^a x(a^2 - 2ax + x^2) dx = \frac{b^2}{2a^2} \int_0^a (a^2x - 2ax^2 + x^3) dx$$

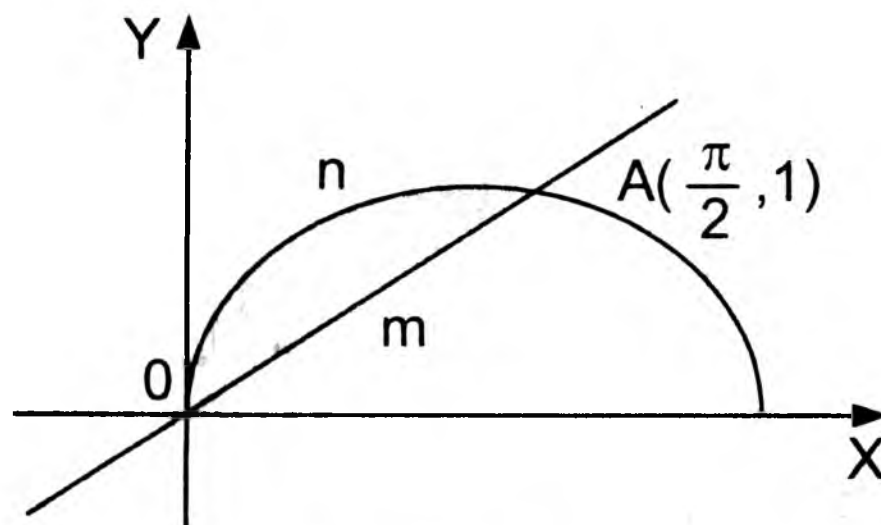
$$= \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{a^4}{2} - \frac{2a^4}{3} + \frac{a^4}{4} \right) = \frac{a^2b^2}{24}$$

$$M_y = \iint_S x \rho(x,y) dx dy = \iint_S x^2 dx dy = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{ab-bx}{a}} x^2 dy \right) dx$$

$$= \int_0^a x^2 \left(\frac{ab-bx}{a} \right) dx = \frac{b}{a} \int_0^a (ax^2 - x^3) dx = \frac{b}{a} \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a$$

$$= \frac{b}{a} \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{a^3b}{12}$$

- 2227** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura OmAnO limitada por las curvas $y = \sin x$ y por las rectas OA que pasa por el origen de coordenadas y por el vértice $A(\frac{\pi}{2}, 1)$ de la senoide.



Desarrollo

La ecuación de la recta es $y = mx$ donde $m = \frac{2}{\pi}$ y $\rho(x,y) = 1$ entonces:

$$M_x = \iint_S y \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin x} y \, dy \right) dx = \frac{\pi}{24}$$

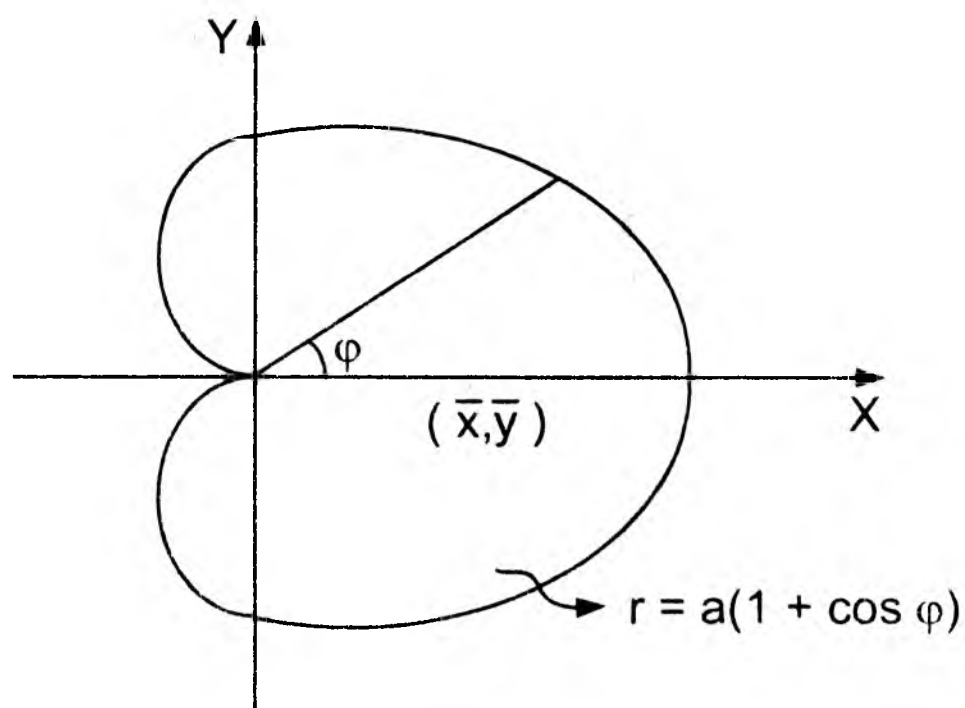
$$M_y = \iint_S x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin x} x \, dy \right) dx = \frac{12 - \pi^2}{12}$$

$$M = \iint_S dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin x} dy \right) dx = \frac{4 - \pi}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{12 - \pi^2}{3(4 - \pi)} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\pi}{6(4 - \pi)}$$

- 2228** Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$

Desarrollo



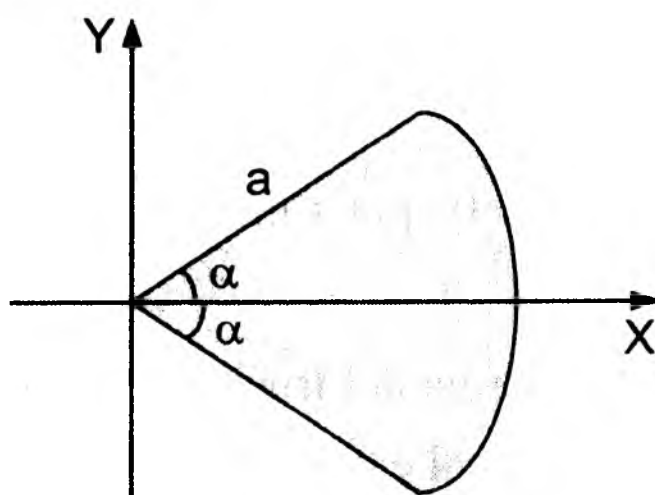
$$M = 2 \int_0^{\pi} \left(\int_0^{a(1+\cos \varphi)} r dr \right) d\varphi = \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi a^2}{2}$$

$$M_y = 2 \int_0^{\pi} \left(\int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^2 \cos \varphi dr \right) d\varphi$$

$$M_y = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} a^3 (1 + \cos \varphi)^3 \cos \varphi d\varphi = \frac{5\pi a^3}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{5a}{6} \quad \text{para} \quad \bar{y} = 0 \quad \text{por simetría.} \quad \text{Luego} \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{5a}{6}, 0 \right)$$

- 2229** Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un sector circular de radio a , cuyo ángulo central es igual a 2α .



Desarrollo

Usando coordenados polares se tiene:

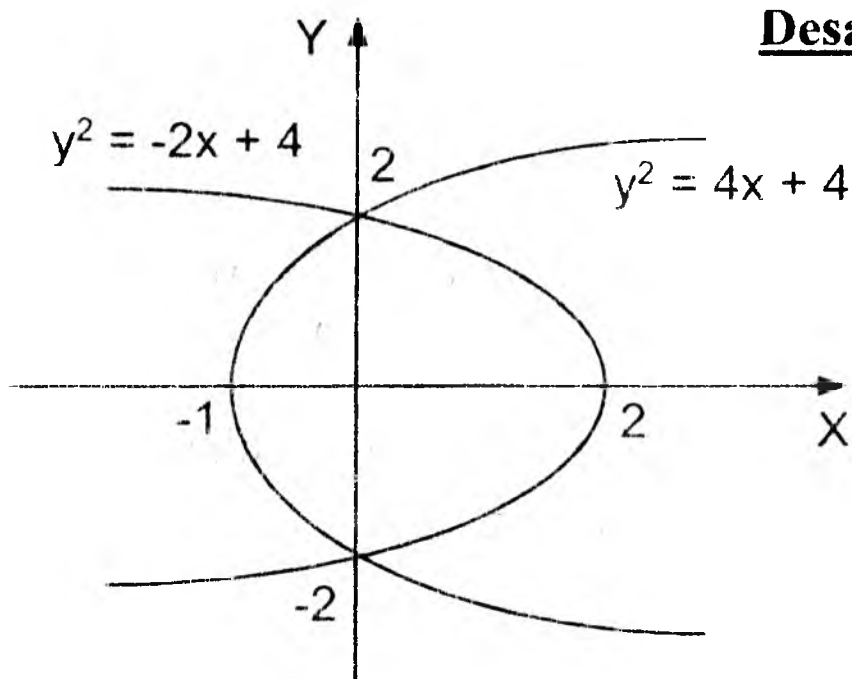
$$M = 2 \int_0^\alpha \left(\int_0^a r dr \right) d\theta = a^2 \int_0^\alpha d\theta = a^2 \alpha$$

$$M_y = 2 \int_0^\alpha \left(\int_0^a r \cos \theta r dr \right) d\theta = \frac{2a^3}{3} \int_0^\alpha \cos \theta d\theta$$

$$M_y = \frac{2a^3}{3} \sin \theta \Big|_0^\alpha = \frac{2a^3 \sin \alpha}{3}$$

como $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha}$, $\bar{y} = 0$ por simetría.

- 2230** Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 4x + 4$ e $y^2 = -2x + 4$

Desarrollo

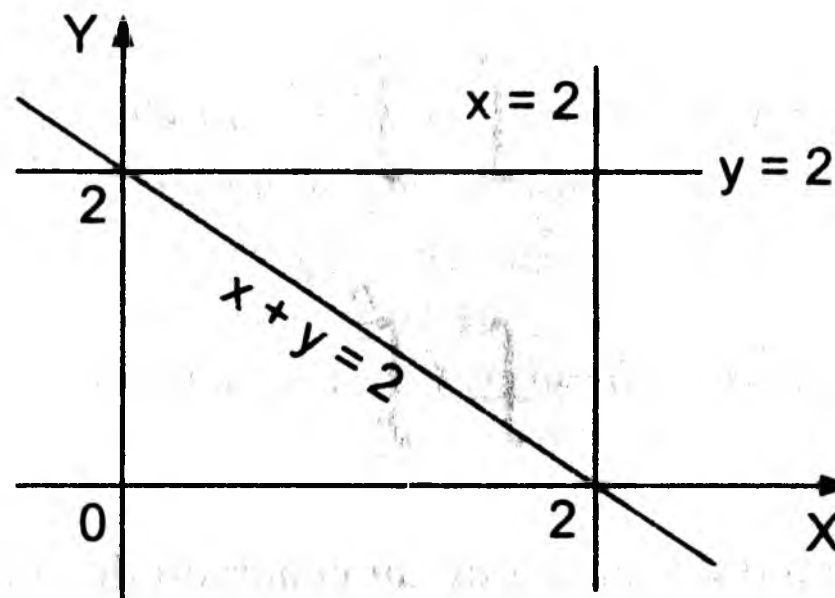
$$M = \int_{-2}^2 \left(\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx \right) dy = 8$$

$$M_y = \int_{-2}^2 \left(\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} x dx \right) dy = \frac{16}{3}$$

Luego $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{3}$ y $\bar{y} = 0$ por simetría $\therefore (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$

- 2231** Calcular el momento de inercia del triángulo limitado por las rectas $x + y = 2$, $x = 2$ e $y = 2$ con respecto al eje OX

Desarrollo



$$I_x = \iint_S y^2 \rho(x, y) dx dy, \text{ como } \rho(x, y) = 1$$

por ser segmentos geométricos de inercia de figuras planas

$$\text{Luego } I_x = \iint_S y^2 dx dy = \int_0^2 \left(\int_{2-y}^2 y^2 dx \right) dy = 4$$

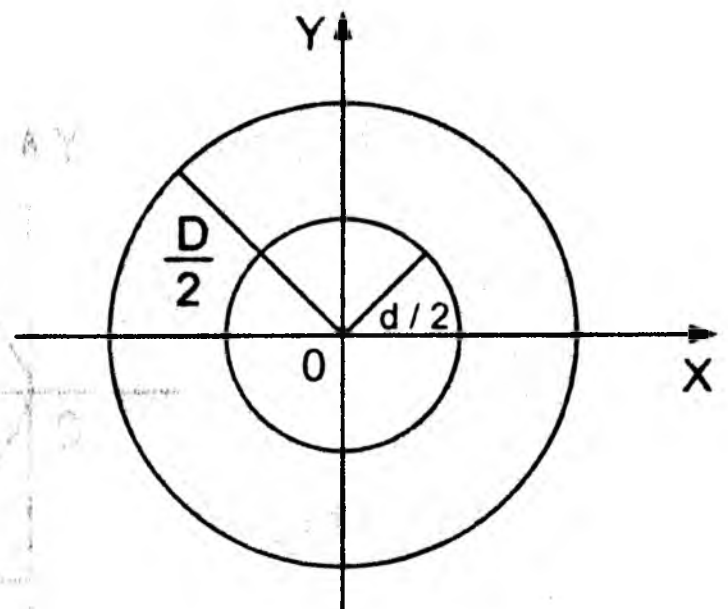
2232 Hallar el momento de inercia de un anillo circular de diámetros d y D ($d < D$).

a) Con respecto a su propio centro.

b) Con respecto a su diámetro

Desarrollo

$$\begin{aligned} \text{a) } I_0 &= \iint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy \\ &= \iint_S (x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$



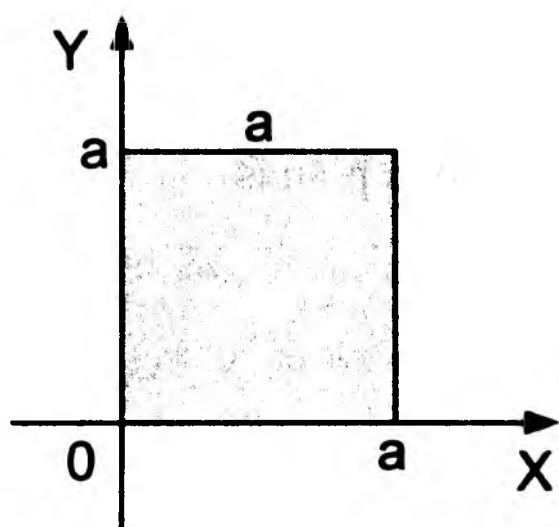
Por ser momentos de inercia de figuras planas.

Ahora usando coordenadas polares se tiene:

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^2 \cdot r dr \right) d\theta = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

$$\text{b) } I_x = \iint_S r^3 \sin^2 \theta d\theta dr = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^3 \sin^2 \theta dr \right) d\theta = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

- 2233** Calcular el momento de inercia de un cuadrado de lado a , con respecto al eje que, pasando por uno de sus vértices, es perpendicular al plano del cuadrado.



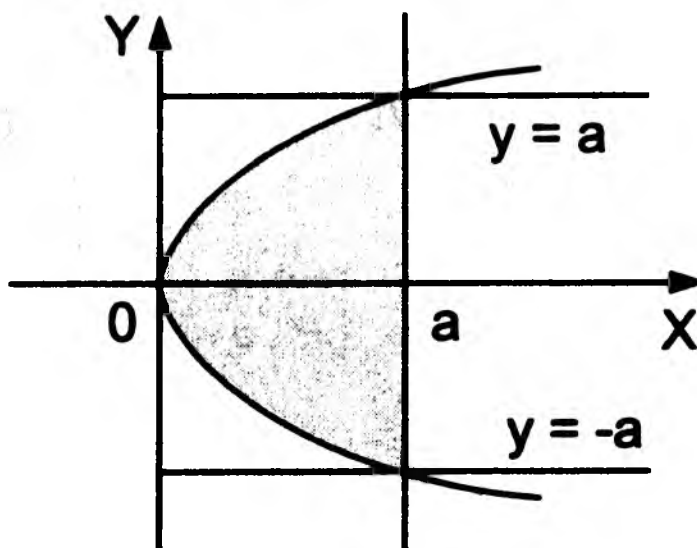
Desarrollo

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy$$

$$I_0 = \int_0^a \left(\int_0^a (x^2 + y^2) dy \right) dx = \frac{2a^4}{3}$$

- 2234** Calcular el momento de inercia del segmento interceptado de la parábola $y^2 = ax$ por la recta $x = a$, con respecto a la recta $y = -a$.

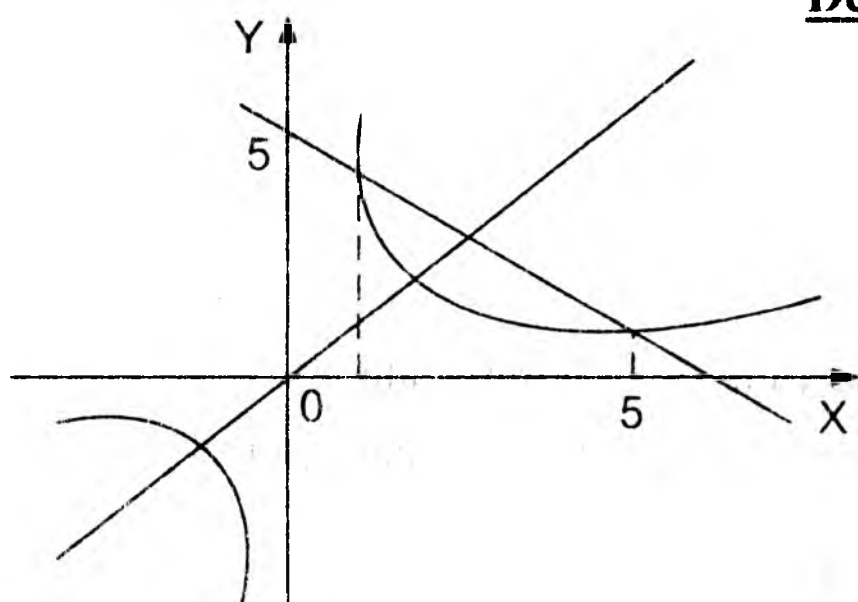
Desarrollo



$$I = \int_0^a \left(\int_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} (y+a)^2 dy \right) dx = \frac{8a^4}{5}$$

- 2235** Calcular el momento de inercia de la superficie limitada por la hipérbola $xy = 4$ y la recta $x + y = 5$, con respecto a la recta $y = x$.

Desarrollo



La distancia del punto (x,y) a la recta

$$y = x \text{ es: } d = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$I = \int_1^4 \left(\int_{\frac{4}{x}}^{5-x} \frac{(x-y)^2}{2} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \left(\int_{\frac{4}{x}}^{5-x} (x^2 - 2xy + y^2) dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 \left(x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{\frac{4}{x}}^{5-x} dx = 16 \ln 2 - 9 \frac{3}{8}$$

- 2236** En una lamina cuadrada de lado a , la densidad es proporcional a la distancia hasta uno de sus vértices, calcular el momento de inercia de dicha lamina con respecto a los lados que pasan por este vértice.

Desarrollo

De acuerdo a las condiciones del problema se tiene $\rho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, el momento de inercia se determina con respecto al eje X , luego pasamos a coordenadas polares.

$$I_x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{a \csc \varphi}^{a \sec \varphi} kr(r \sen \varphi)^2 r dr \right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \csc \varphi} kr(r \sen \varphi)^2 r dr \right) d\varphi$$

$$I_x = \frac{k}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sen^2 \varphi \cdot a^5 \sec^5 \varphi d\varphi + \frac{k}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sen^2 \varphi \cdot a^5 \csc^5 \varphi d\varphi$$

$$I_x = \frac{ka^5}{40} [7\sqrt{2} + 3 \ln(\sqrt{2} + 1)]$$

- 2237** Hallar el momento de inercia de la superficie de la lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$, con respecto al eje perpendicular al plano de la misma que pasa por el polo.

Desarrollo

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r^3 dr \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^4 \Big|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^4 (4 \cos^2 2\varphi) d\varphi$$

$$= 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = 2a^4 \left(\varphi + \frac{\sen 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^4 \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) = \frac{a^4 \pi}{2}$$

- 2238** Hallar el momento de inercia de la cardioide $r = a(1 + \cos \varphi)$ con respecto al polo.

Desarrollo

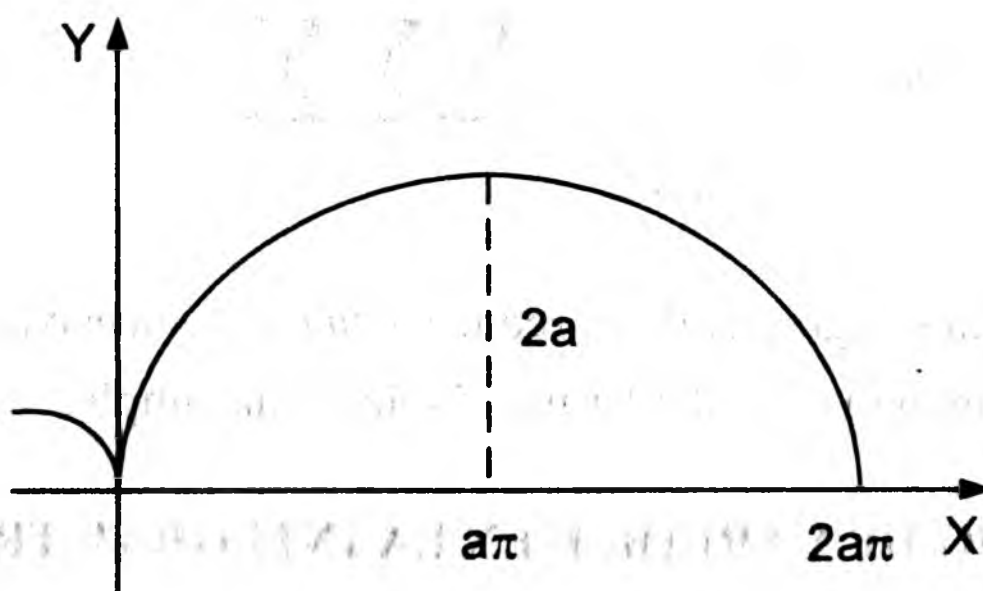
$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^{\pi} \left(\int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^3 dr \right) d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{a(1+\cos \varphi)} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^4 (1 + \cos \varphi)^4 d\varphi = \frac{a^4}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{a^4}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{19}{4} + 5 \cos \varphi + 4 \cos 2\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2} - \sin^2 \varphi \cos \varphi \right) d\varphi = \frac{19a^4 \pi}{8}$$

2239 Calcular el momento de inercia de una lamina homogénea limitada por un arco de la cicloide $x = a(1 - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ y el eje OX, con respecto al eje OX.

Desarrollo



Se tiene que $x = a(t - \sin t) \Rightarrow dx = a(1 - \cos t) dt$

$$y = a(1 - \cos t)$$

$$I_x = \iint_S y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{a(1-\cos t)} y^2 a(1 - \cos t) dy \right) dt$$

$$= a \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \frac{y^3}{3} \Big|_0^{a(1-\cos t)} dt = \frac{a}{3} \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^4 dt$$

$$= \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^4 dt = \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t - 4 \cos^3 t + 6 \cos^2 t - 4 \cos t + 1) dt$$

$$= \frac{a^4}{3} \left[\frac{35t}{6} + \frac{7}{4} \sin 2t - 4 \sin t + \frac{\sin 4t}{16} - \frac{\sin^3 t}{3} \right] \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{35\pi}{12}$$

7.7. INTEGRALES TRIPLES.-

1ra. LA INTEGRAL TRIPLE EN COORDENADAS RECTANGULARES.-

Se llama integral triple una función $f(x,y,z)$ sobre un recinto V , al limite de la correspondiente suma triple.

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta z_i \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

el cálculo de la integral triple se reduce a calcular sucesivamente tres integrales ordinarias (simples) o a calcular una doble y una simple.

2do. CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL TRIPLE.-

Si en la integral triple $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ hay que pasar de las variables

x, y, z a las variables u, v, w relacionados con las primeras por las igualdades $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \phi(u, v, w)$ donde las funciones φ, ψ, ϕ .

- ① Son continuas, junto con sus derivadas parciales de primer orden.
- ② Establecen una correspondencia biunívoca continua en ambos sentidos entre los puntos del recinto de integración V del espacio $OXYZ$ y los puntos de un recinto determinado V' del espacio $O'UVW$ y
- ③ El determinante funcional (jacobiano) de estas funciones es:

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

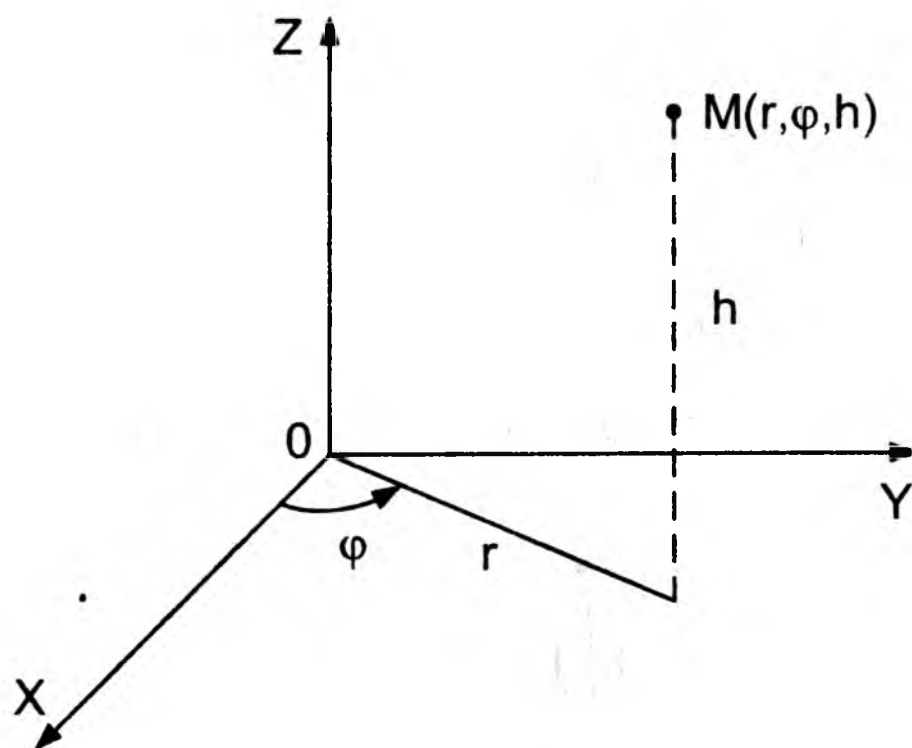
Conserva invariable su signo en el recinto V , entonces, será válida la fórmula.

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \phi(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

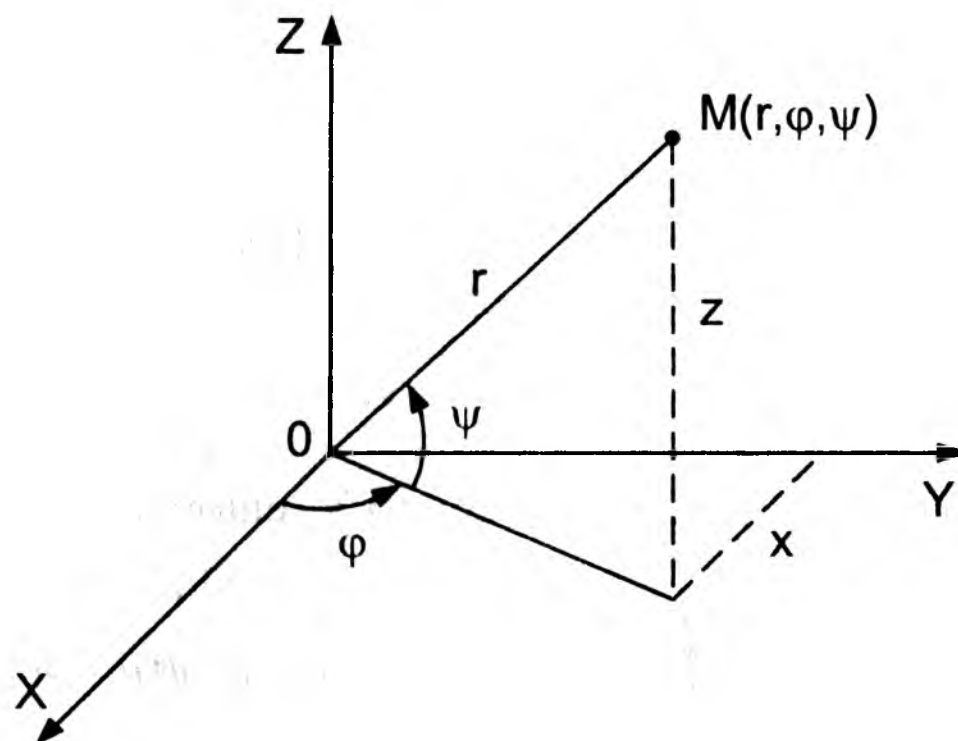
En particular:

- ① Para las coordenadas cilíndricas r, φ, h

$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h$ obtenemos que $J(r, \varphi, h) = r$



- ② Para las coordenadas esféricas φ, ψ, r (φ es la longitud, ψ la latitud y r el radio vector) donde $x = r \cos \psi \cos \varphi, y = r \cos \psi \sin \varphi, z = r \sin \psi$ tenemos $J(\varphi, \psi, r) = r^2 \cos^2 \psi$



3er. APLICACIONES DE LAS INTEGRALES TRIPLES.-

El volumen de un recinto del espacio tridimensional OXYZ es igual a:

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

La masa de un cuerpo que ocupa el recinto V

$$M = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz$$

donde $\gamma(x, y, z)$ es la densidad del cuerpo en el punto (x, y, z) .

Los momentos estáticos de un cuerpo, con respecto a los planos coordenados son:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_V \gamma(x, y, z) z dx dy dz \\ M_{yz} &= \iiint_V \gamma(x, y, z) x dx dy dz \\ M_{xz} &= \iiint_V \gamma(x, y, z) y dx dy dz \end{aligned}$$

Las coordenadas del centro de gravedad

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Si el cuerpo es homogéneo, en las fórmulas para determinar las coordenadas del centro de gravedad se puede poner $\gamma(x,y,z) = 1$.

Los momentos de inercia, con respecto a los ejes coordenados son:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz \\ I_y &= \iiint_V (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz \\ I_z &= \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

poniendo en estas fórmulas $\gamma(x,y,z) = 1$, obtenemos los momentos geométricos de inercia del cuerpo.

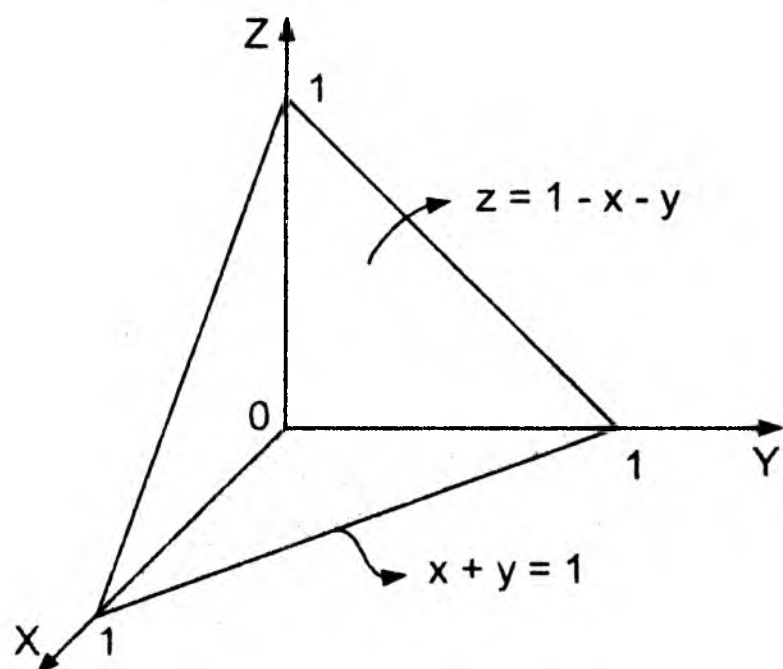
A) CÁLCULO DE LAS INTEGRALES TRIPLES.

Calcular los límites de integración de la integral triple

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{para los recintos } V \text{ que se indican a continuación.}$$

2240 V es un tetraedro limitado por las superficies $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

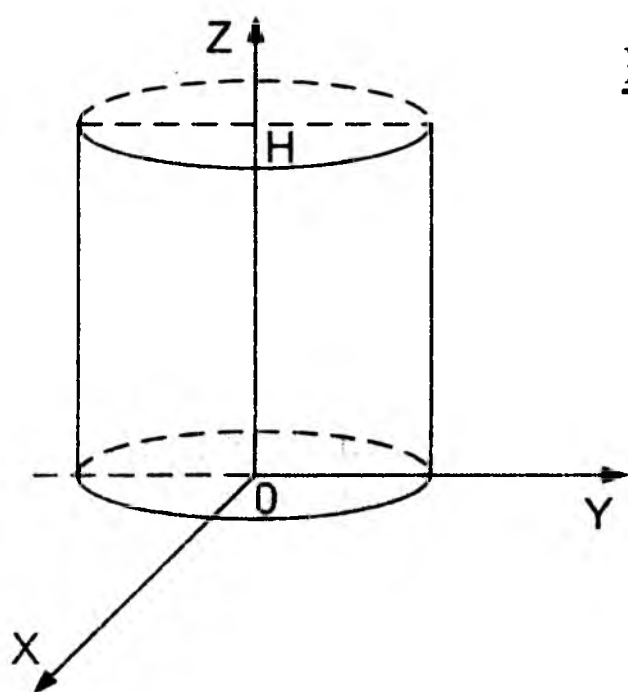
Desarrollo



$$V = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz$$

2241 V es un cilindro limitado por las superficies $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$.



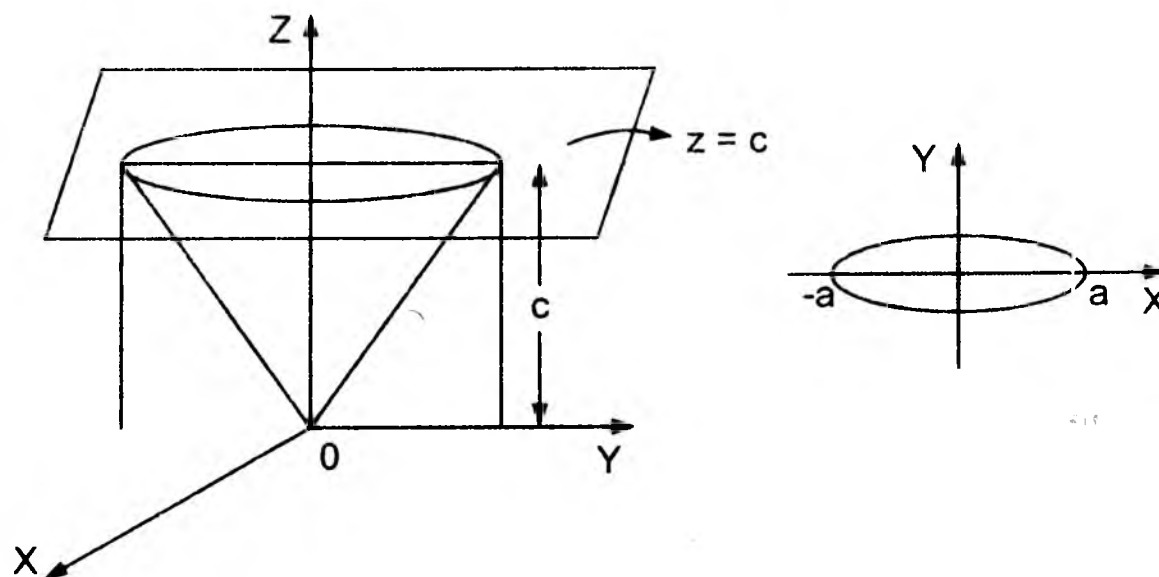
Desarrollo

$$V = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^H f(x, y, z) dz$$

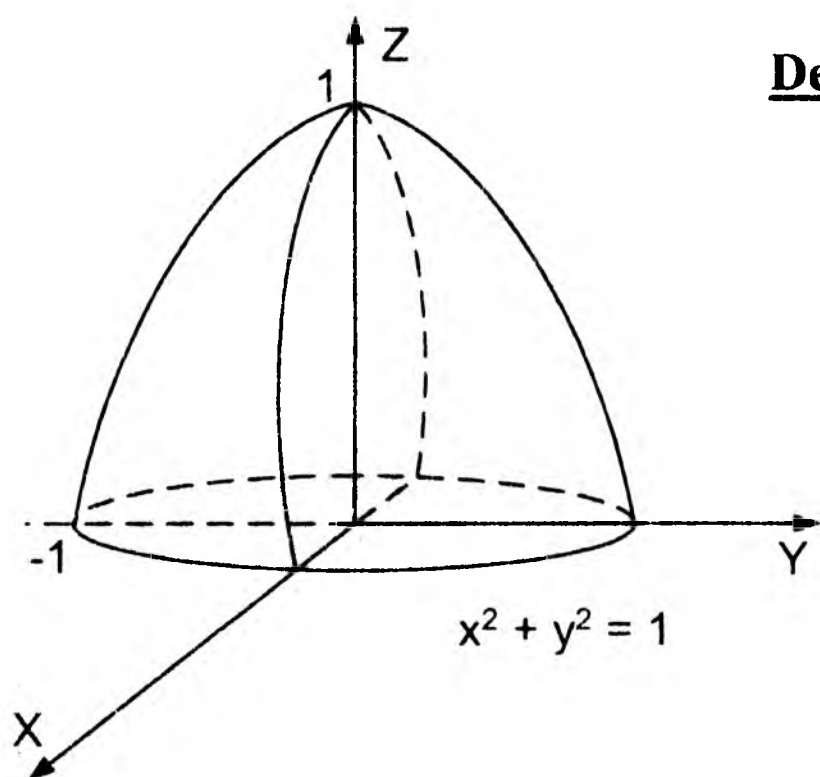
2242 V es un cono limitado por las superficies $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$

Desarrollo



$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^a dx \int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^c f(x, y, z) dz$$

2243 V es un volumen limitado por las superficies $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$



Desarrollo

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-x^2-y^2} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

2244 $\int_1^0 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_1^0 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} &= \int_1^0 dx \int_0^1 2\sqrt{x+y+z+1} \Big|_0^1 dy \\ &= \int_1^0 dx \int_0^1 (2\sqrt{x+y+2} - 2\sqrt{x+y+1}) dy \\ &= \int_1^0 \left[\frac{4}{3}(x+y+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}(x+y+1)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^1 dy \\ &= \frac{4}{3} \int_1^0 [(x+3)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \left[\frac{2}{5} (x+3)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} (x+2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} \right] \Big|_1^0 = \frac{16}{15} \left(3^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}} - \frac{31}{2} \right)$$

$$2245 \quad \int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} x dz$$

Desarrollo

$$\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} x dz = \int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} x \frac{\sqrt{4x-y^2}}{2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} x \sqrt{4x-y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 \left[\frac{xy}{2} \sqrt{4x-y^2} + 2x \operatorname{arcsen} \frac{y}{2\sqrt{x}} \right] \Big|_0^{2\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 [x\sqrt{x}\sqrt{4x-4x} + 2x \operatorname{arcsen} 1] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 x\pi dx = \frac{x^2\pi}{2\sqrt{2}} \Big|_0^2 = \sqrt{2}\pi$$

$$2246 \quad \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$$

Desarrollo

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \arcsen\left(\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right) \Big/_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dy \\
 &= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \arcsen 1 dy = \frac{\pi}{2} \int_0^a y \Big/_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} \right] \Big/_0^a \\
 &= \frac{\pi}{4} [(0 + a^2 \arcsen 1) - 0] = \frac{a^2 \pi^2}{8}
 \end{aligned}$$

2247 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Big/_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{xy(1-x-y)^2}{2} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^3 y + xy^3 + 2x^2 y^2 - 2x^2 y + xy - 2xy^2) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^3 y^2}{2} + \frac{xy^4}{4} + \frac{2x^2 y^3}{3} - x^2 y^2 + \frac{xy^2}{2} - \frac{2xy^3}{3} \right) \Big/_0^{1-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{6} (-2x^4 + 9x^3 - 12x^2 + 5x) dx = \frac{1}{12} \left[-\frac{2x^5}{5} + \frac{9x^4}{4} - 4x^3 + \frac{5x^2}{2} \right] \Big/_0^1 \\
 &= \frac{1}{12} \left(\frac{133}{80} \right) = \frac{133}{260}
 \end{aligned}$$

- 2248** Calcular $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, donde V es el recinto de integración que está limitado por los planos coordenados y por el plano $x+y+z=1$.

Desarrollo

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} -\frac{1}{2(x+y+z+1)^2} \Big|_0^{1-x-y} dy$$

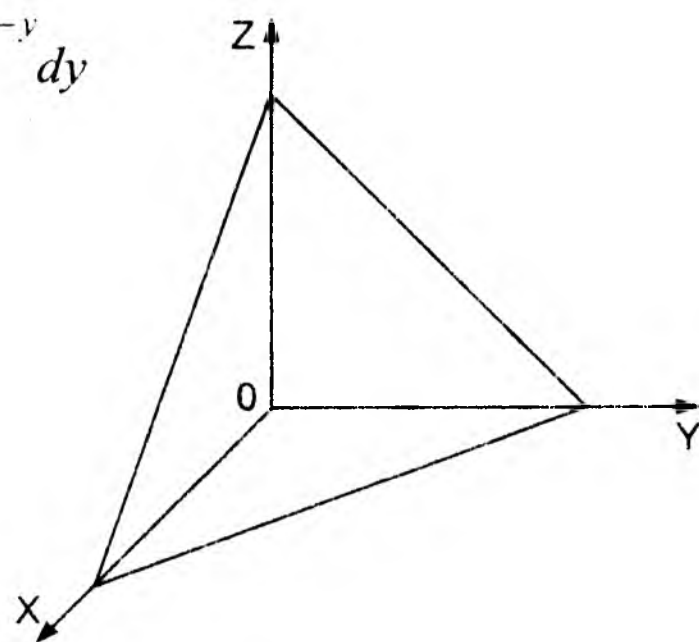
$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{x+y+1} \right) \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left(0 + \frac{1}{x+1} \right) \right] dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{3-x}{4} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

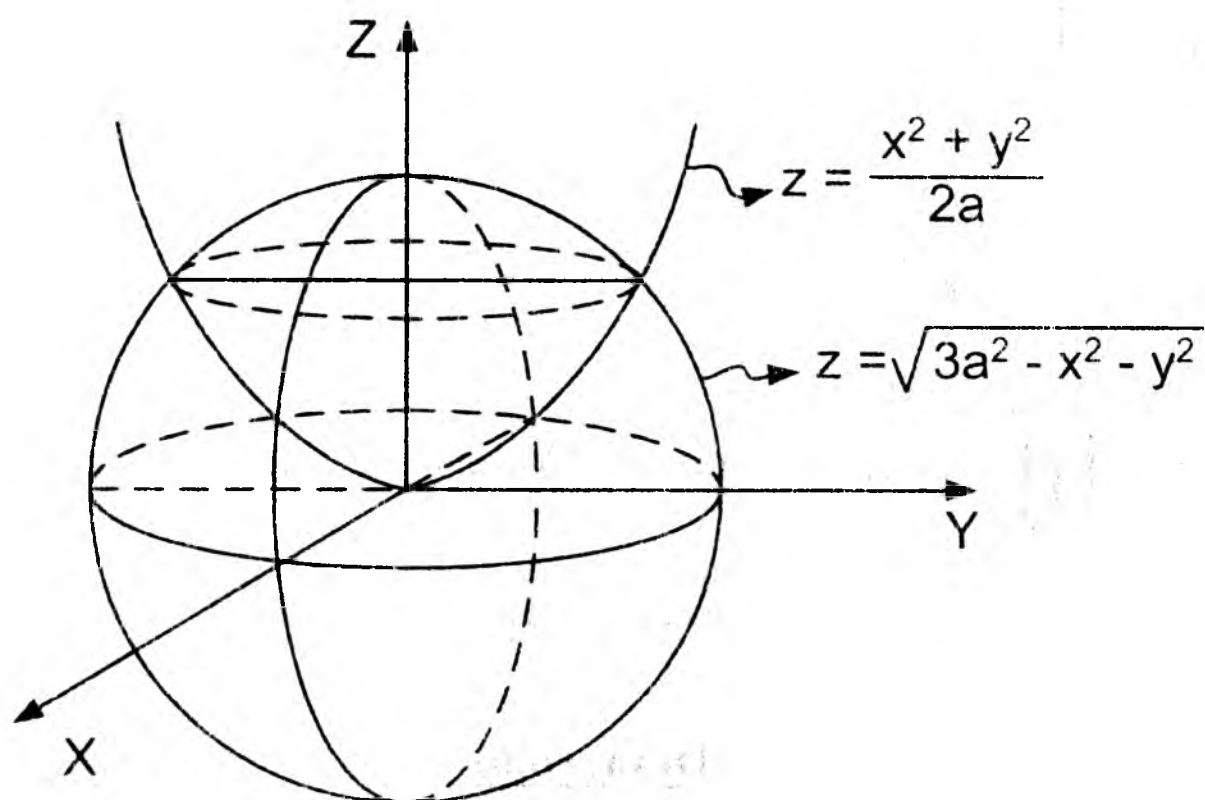
$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{3x}{4} - \frac{x^2}{8} - \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2 \right) - 0$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{5}{8} - \ln 2 \right) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$$



- 2249** Calcular $\iiint_V (x+y+z)^2 dx dy dz$, donde V es la parte común del paraboloide $2ax \geq x^2 + y^2$ y de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$

Desarrollo

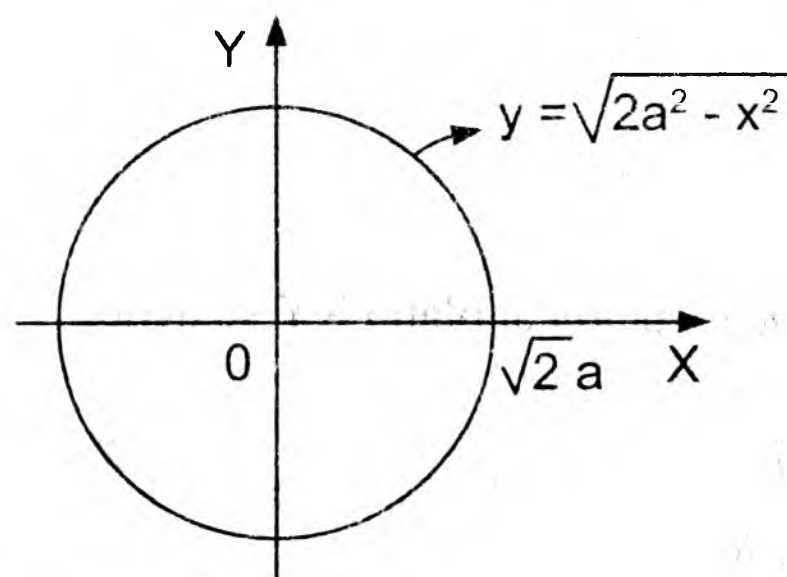


Proyectando la intersección al plano XY

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2az \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow 3a^2 - z^2 = 2az$$

$$z^2 + 2az - 3a^2 = 0 \Rightarrow z = a$$

por lo tanto $x^2 + y^2 = 2a^2$ es la intersección proyectada



$$V = 4 \int_0^{\sqrt{2}a} \left(\int_0^{\sqrt{2a^2 - x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}} (x + y + z)^2 dz \right) dy \right) dx$$

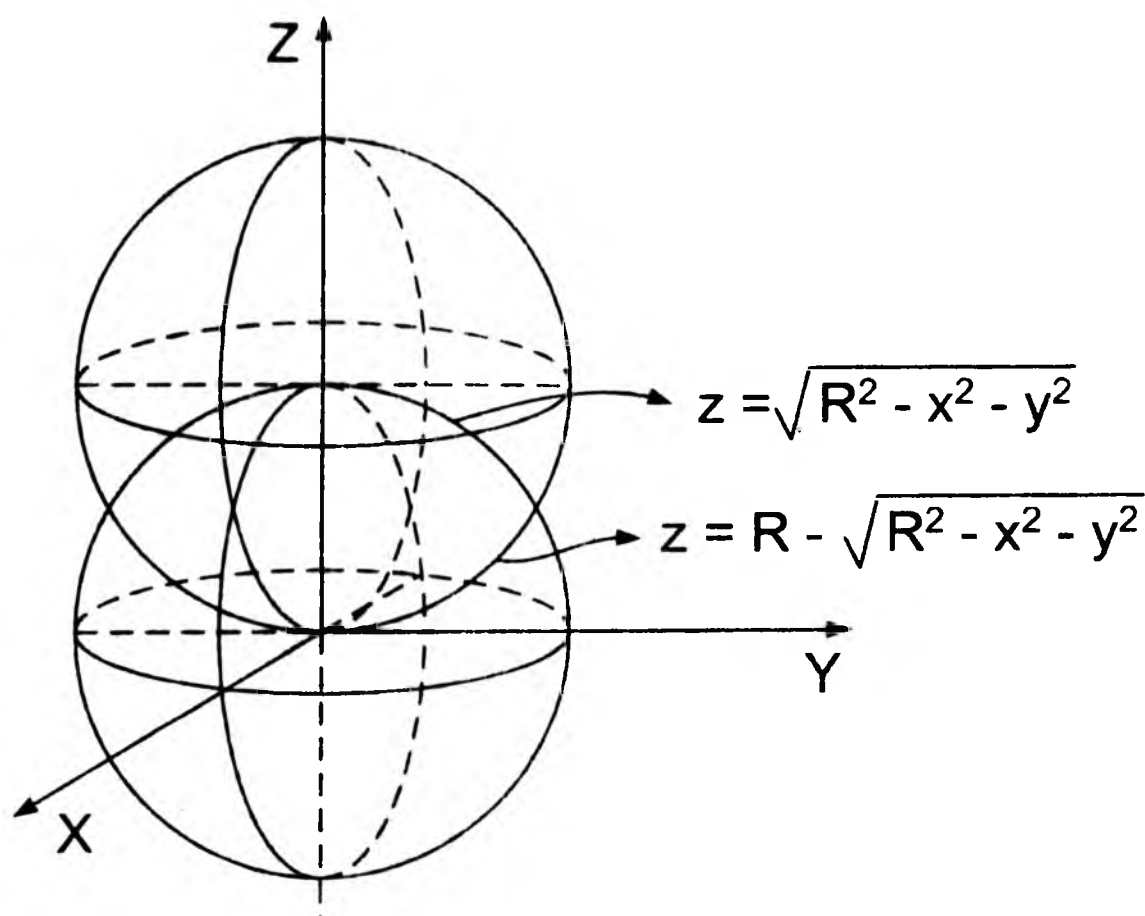
$$V = 4 \int_0^{\sqrt{2}a} \left(\int_0^{\sqrt{2a^2-x^2}} \left[(x+y)^2 z + (x+y)z^2 + \frac{z^3}{3} \right] \Big|_0^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} dy \right) dx$$

$$V = \frac{\pi a^5}{5} \left[18\sqrt{3} - \frac{97}{6} \right]$$

2250 Calcular $\iiint_V z^2 dx dy dz$, donde V es la parte común de las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$$

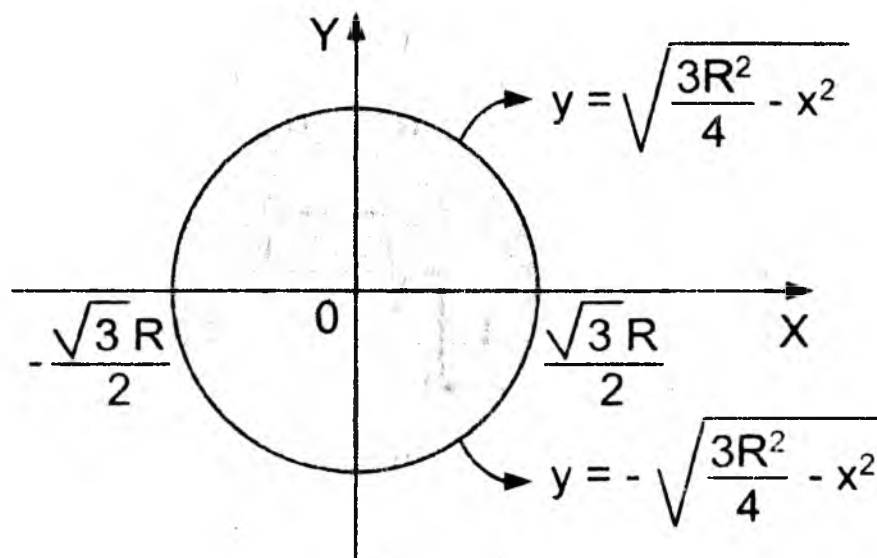
Desarrollo



Proyectando la intersección al plano XY se tiene:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz \end{cases} \Rightarrow 2Rz = R^2 \Rightarrow z = \frac{R}{2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{3R^2}{4}$$

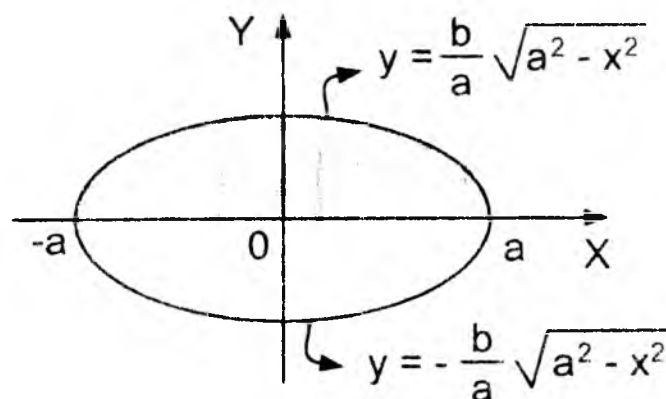
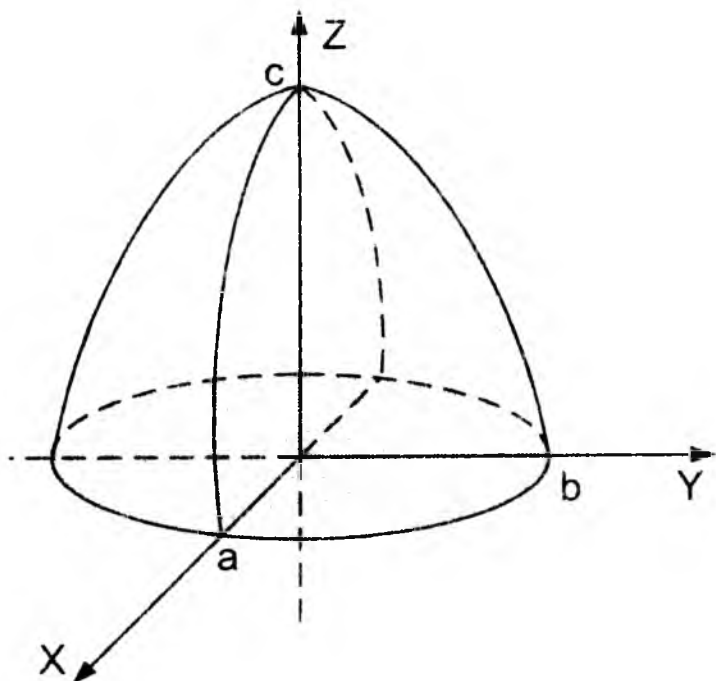


$$\begin{aligned} \iiint_V z^2 dx dy dz &= \int_{-\frac{\sqrt{3}R}{2}}^{\frac{\sqrt{3}R}{2}} \left(\int_{-\frac{\sqrt{3R^2-4ax^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3R^2-4ax^2}}{2}} \left(\int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2 dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{3}R}{2}}^{\frac{\sqrt{3}R}{2}} \left(\int_{-\frac{\sqrt{3R^2-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3R^2-x^2}}{2}} \left(z^3 \Big|_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \right) dy \right) dx = \frac{59\pi R^5}{480} \end{aligned}$$

2251 Calcular $\iiint_V z dx dy dz$, donde V es el volumen limitado por el plano $z = 0$ y

por la mitad superior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Desarrollo



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = a \Rightarrow z^2 = c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V z \, dx \, dy \, dz &= 2 \int_{-a}^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{-a}^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy \right) dx \\ &= c^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) y - \frac{y^3}{3b^2} \Big|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx = c^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3b^2}\right) y \Big|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= c^2 \int_{-a}^a \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{3b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)\right] \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{c^2 b}{a} \int_{-a}^a \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{3a^2} (a^2 - x^2)\right] \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{bc^2}{a} \int_{-a}^a \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{abc^2 \pi}{4} \end{aligned}$$

2252 Calcular $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx \, dy \, dz$, donde V es la parte interna del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Desarrollo

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow J(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

para el caso del elipsoide se tiene:

$$\begin{cases} x = a \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = b \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = c \rho \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow J(\rho, \theta, \varphi) = abc \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \rho^2 abc \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d \rho \right) d \varphi \right) d \theta \\ &= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi^5}{5} \operatorname{sen} \varphi \Big|_0^1 d \varphi \right) d \theta = \frac{8abc}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \varphi d \varphi \right) d \theta \\ &= \frac{8abc}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d \theta = \frac{8abc}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d \theta = \frac{4abc\pi}{5} \end{aligned}$$

- 2253 Calcular $\iiint_V z dx dy dz$, donde V es el recinto limitado por $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ y por el elipse $z = h$.

Desarrollo

Mediante coordenadas cilíndricas se tiene: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J(r, \theta, z) = r$

$$\begin{aligned} \iiint_V z dx dy dz &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R \left(\int_0^{\frac{hr}{R}} rz dz \right) dr \right) d \theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R rz^2 \Big|_0^{\frac{hr}{R}} dr \right) d \theta \\ &= \frac{2h^2}{R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r^3 dr \right) d \theta = \frac{2h^2}{4R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 d \theta = \frac{h^2 R^2 \pi}{4} \end{aligned}$$

2254 Calcular la siguiente integral, pasando a coordenadas cilíndricas $\iiint_V dx dy dz$,

donde V es el recinto limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2$ y que contiene al punto $(0,0,R)$.

Desarrollo

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J(r, \theta, z) = r, \text{ proyectando al plano XY}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow z = 0, z = R$$

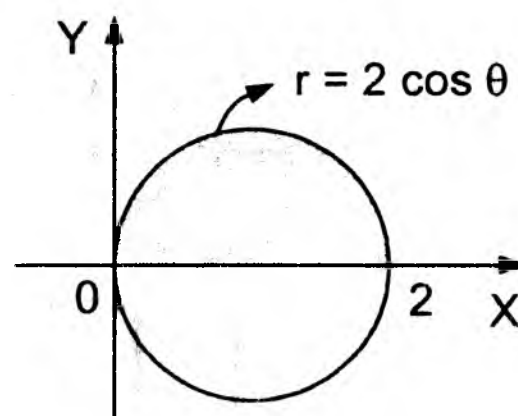
Luego se tiene $x^2 + y^2 = R^2$ es la proyección sobre el plano XY

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left(\int_r^{R+\sqrt{R^2-r^2}} r dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R [r(R + \sqrt{R^2 - r^2}) - r^2] dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{Rr^2}{2} - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right) \bigg|_0^R d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} \right) d\theta = R^3 \pi \end{aligned}$$

2225 Calcular $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz$, transformando previamente a las coordenadas cilíndricas.

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \\ 0 \leq z \leq a \end{cases}$



$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2+y^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \left(\int_0^a z \cdot r \cdot r dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^2 \frac{z^2}{2} \Big|_0^a dr \right) d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{4a^2}{3} \left(\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a^2}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8a^2}{9}$$

2256

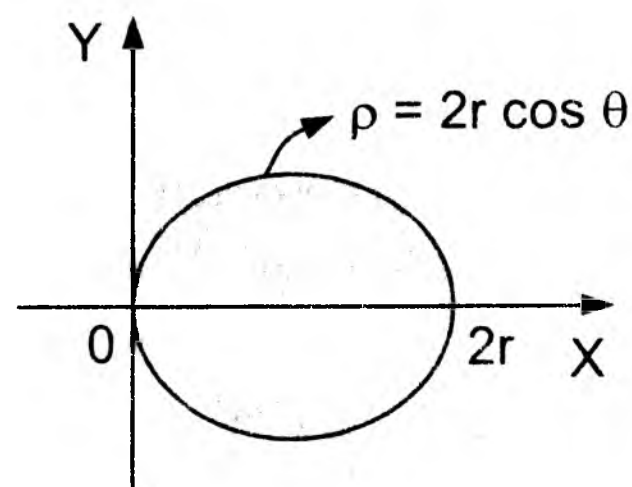
Calcular

$$\int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$$

Desarrollo

Sea $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2r \\ -\sqrt{2rx-x^2} \leq y \leq \sqrt{2rx-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4r^2-x^2-y^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J(\rho, \theta, z) = \rho$$



$$\begin{aligned}
 \int_0^{2r} dx \int_{\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} \left(\int_0^{\sqrt{4r^2-\rho^2}} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2r\cos\theta} \rho \sqrt{4r^2-\rho^2} d\rho \right) d\theta = -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4r^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2r\cos\theta} d\theta \\
 &= -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8r^3 \sin^3\theta - 8r^3) d\theta = -\frac{16r^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta - 1) d\theta \\
 &= -\frac{16r^3}{3} \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} - \theta \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8r^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right)
 \end{aligned}$$

2257

Calcular

$$\int_{-R}^R dx \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz,$$

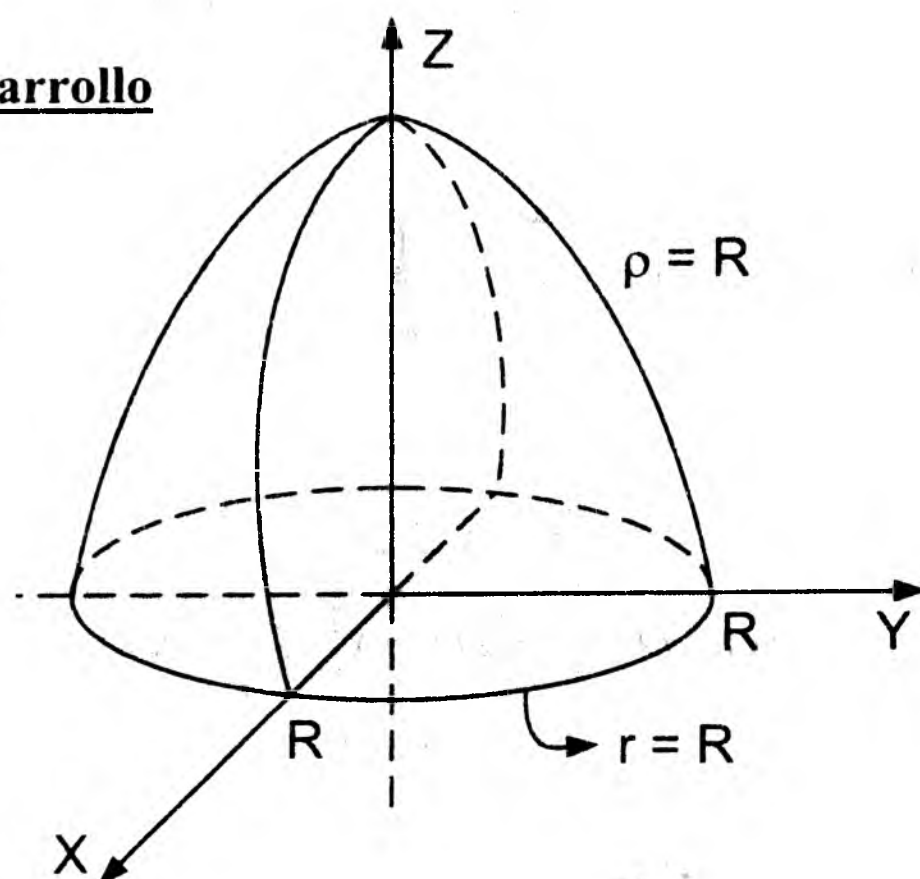
transformándola

previamente a las coordenadas esféricas.

Desarrollo

$$D: \begin{cases} -R \leq x \leq R \\ -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{R^2-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$



$$\int_{-R}^R dx \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right) d\varphi \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 \varphi}{5} \cdot \rho^5 \Big|_0^R d\varphi \right) d\theta = \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
 &= \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left[(0-0) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] d\theta = \frac{2R^5}{15} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{4R^5 \pi}{15}
 \end{aligned}$$

2258 Calcular la integral, pasando a las coordenadas esféricas

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \text{ donde } V \text{ es la parte interna de la esfera}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

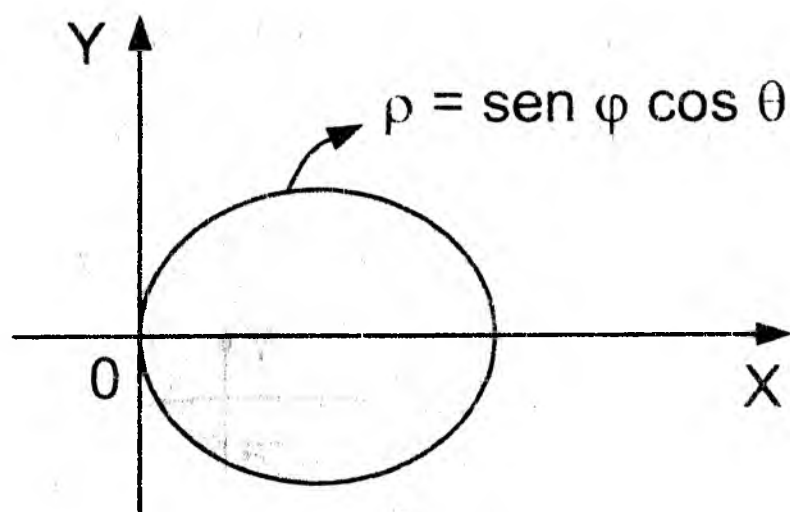
Desarrollo

Proyectando al plano XY se tiene $z = 0$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin \varphi$$



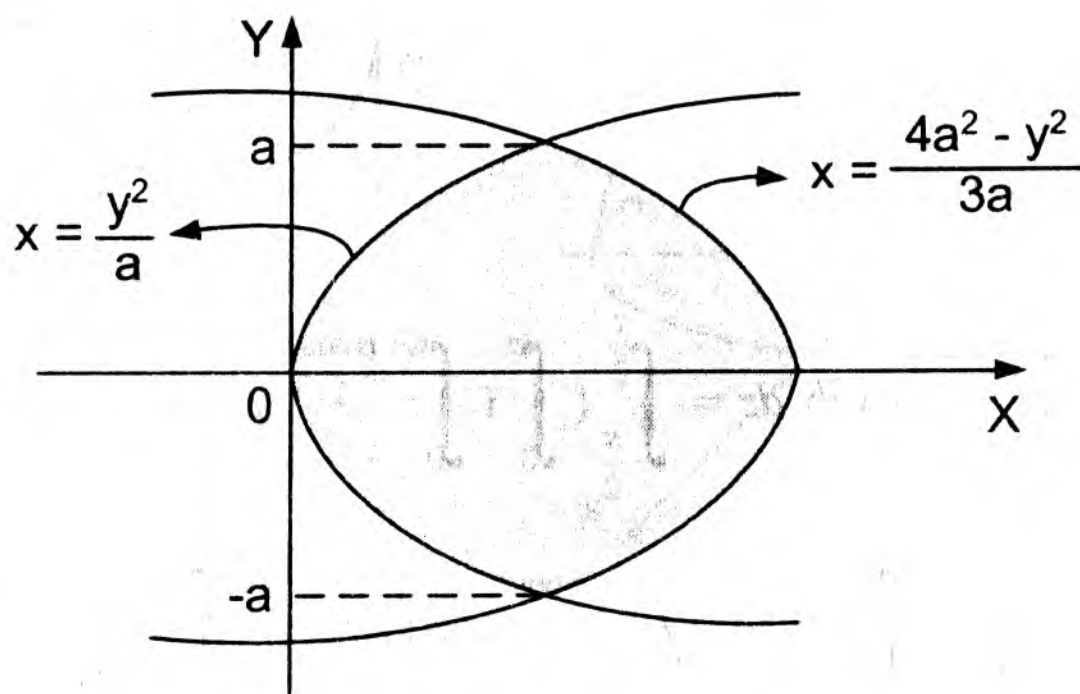
$$\begin{aligned}
 \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\sin \varphi \cos \theta} \rho \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \right) d\varphi \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} e^4 \sin \varphi \Big|_0^{\sin \varphi \cos \theta} d\varphi \right) d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \sin^5 \varphi \cos^4 \theta d\varphi \right) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos \varphi + \frac{2 \cos^3 \varphi}{3} - \frac{\cos^5 \varphi}{5} \right) \cos^4 \theta \Big|_0^{\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right] \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{16}{15} \cos^4 \theta d\theta \\
&= \frac{4}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \frac{1}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{2} + 2 \cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2} \right] d\theta = \frac{1}{15} \left[\frac{3\theta}{2} + \frac{2 \sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 4\theta}{8} \right] \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{15} \left[\left(\frac{3\pi}{4} + 0 \right) - \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{10}
\end{aligned}$$

B) CÁLCULO DE VOLÚMENES DE INTEGRALES TRIPLES.-

- 2259** Calcular, por medio de una integral triple, el volumen del cuerpo limitado por las superficies $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm h$

Desarrollo



Proyectando al plano XY se tiene:

$$\begin{cases} y^2 = 4a^2 - 3ax \\ y^2 = ax \end{cases} \Rightarrow 4a^2 - 3ax = ax \Rightarrow x = a, y = \pm a$$

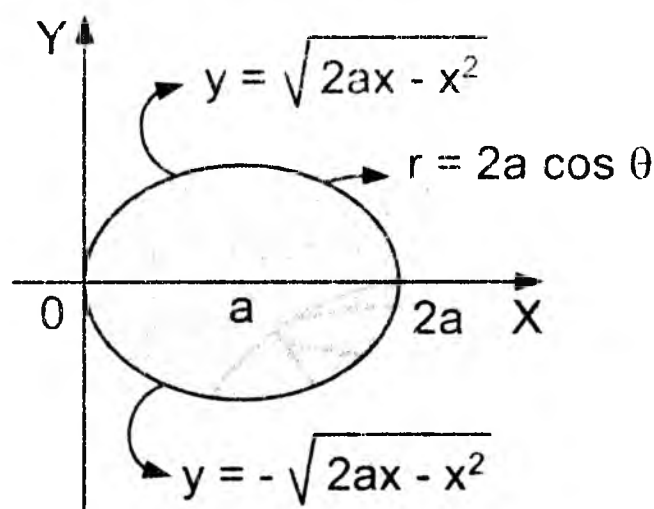
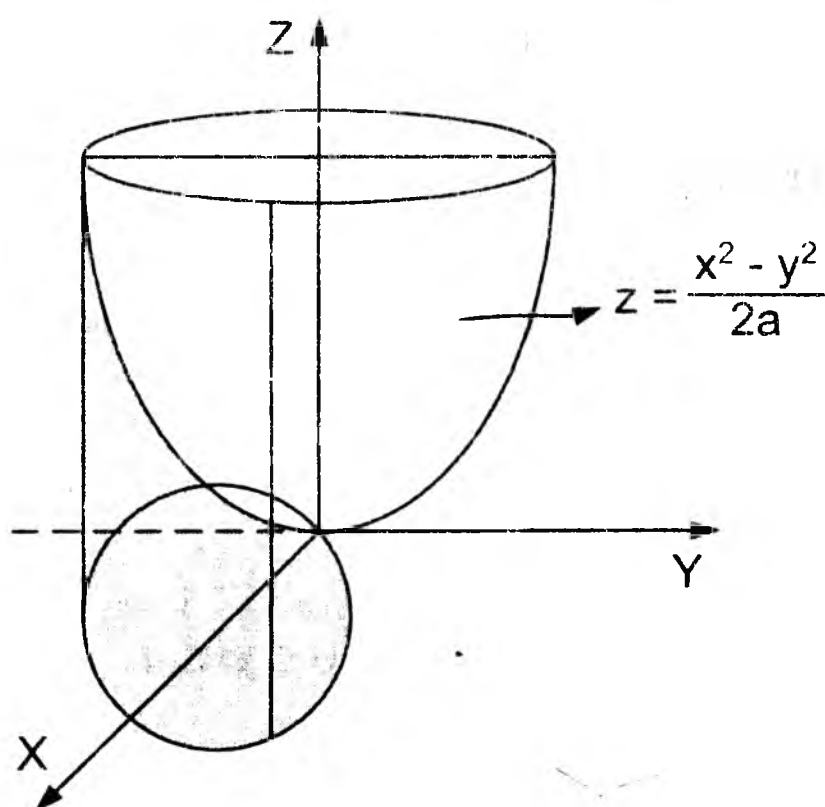
$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_{-a}^a \left(\int_{\frac{y^2}{a}}^{\frac{4a^2 - y^2}{3a}} \left(\int_{-h}^h dz \right) dx \right) dy = 2h \int_{-a}^a \left(\int_{\frac{y^2}{a}}^{\frac{4a^2 - y^2}{3a}} dx \right) dy$$

$$= 2h \int_{-a}^a \left(\frac{4a^2 - y^2}{3a} - \frac{y^2}{3a} \right) dy = 2h \left[\frac{4ay}{3} - \frac{4y^3}{9a} \right] \Big|_{-a}^a$$

$$= 2h \left[\left(\frac{4a^2}{3} - \frac{4a^2}{9} \right) - \left(-\frac{4a^2}{3} + \frac{4a^2}{9} \right) \right] \quad \therefore V = \frac{32a^2 h}{9}$$

- 2260** Calcular el volumen de la parte de cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, comprendido entre el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ y al plano XY.

Desarrollo



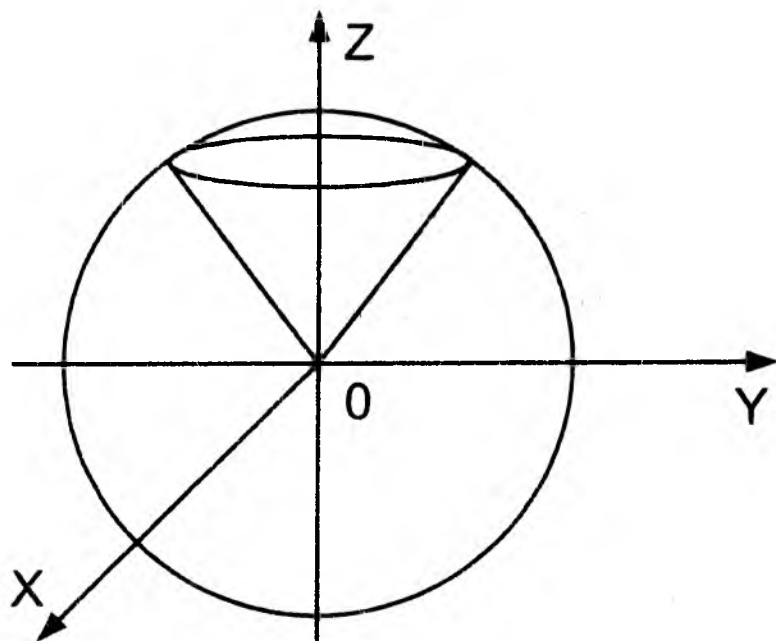
Pasando a coordenadas cilíndricas se tiene:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J(r, \theta, z) = r$$

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \cos \theta} \left(\int_0^{\frac{r^2}{2a}} r dz \right) dr \right) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \cos \theta} \frac{r^3}{2a} dr \right) d\theta \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2a \cos \theta} d\theta = \frac{1}{4a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16a^4 \cos^4 \theta d\theta \\ &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)^2 d\theta = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\ &= a^3 \left[\frac{3\theta}{2} + \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^3 \left(\frac{3\pi}{4} + 0 \right) = \frac{3a^3 \pi}{4} \end{aligned}$$

- 2261** Calcular el volumen del cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el arco $z^2 = x^2 + y^2$ la parte posterior con respecto al cono.

Desarrollo



Proyectando al plano XY se tiene:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \rho \leq a \\ \frac{\pi}{4} &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

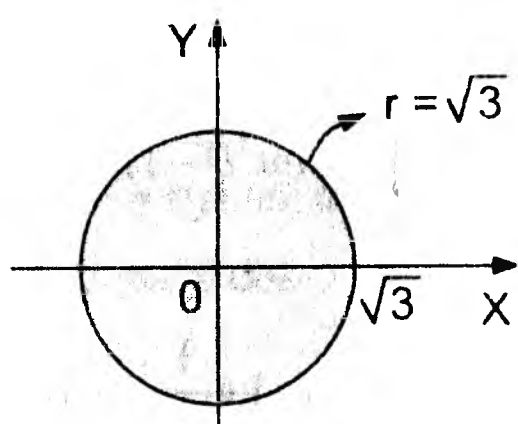
$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho \right) d\varphi \right) d\theta \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \Big|_0^a d\varphi \right) d\theta = \frac{2a^3}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \varphi d\varphi \right) d\theta \\
 &= \frac{2a^3}{3} \int_0^{2\pi} -\cos \varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\sqrt{2}a^3}{3} \theta \Big|_0^{2\pi} \quad \therefore V = \frac{2\sqrt{2}a^3\pi}{3}
 \end{aligned}$$

- 2262** Calcular el volumen del cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$ (la parte interior con respecto al paraboloide).

Desarrollo

Proyectando al plano XY la intersección de superficies

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases} \Rightarrow z^2 + 3z - 4 = 0 \Rightarrow z = 1$$



$$\therefore x^2 + y^2 = 3$$

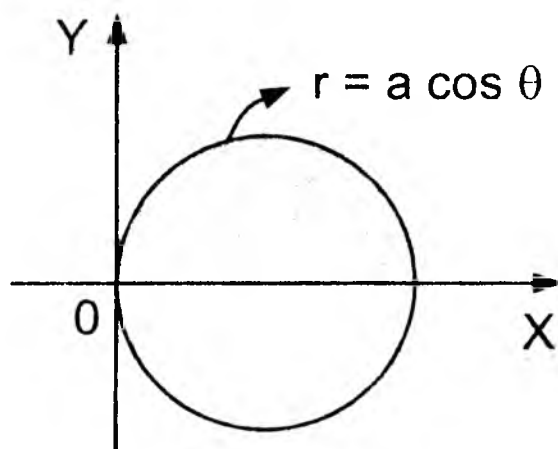
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} r dz \right) dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \left(r\sqrt{4-r^2} - \frac{r^3}{3} \right) dr \right) d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[(4-r^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{r^4}{4} \right] \Big|_0^{\sqrt{3}} d\theta
 \end{aligned}$$

$$= \frac{19}{12} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{19\pi}{6}$$

- 2263** Calcular el volumen del cuerpo limitado por el plano XY, el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (interno respecto al cilindro).

Desarrollo



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J(r, \theta, z) = r$$

$$V = \iiint_V dx dy dz = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos \theta} \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} dr \right) d\theta = -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a \cos \theta} d\theta$$

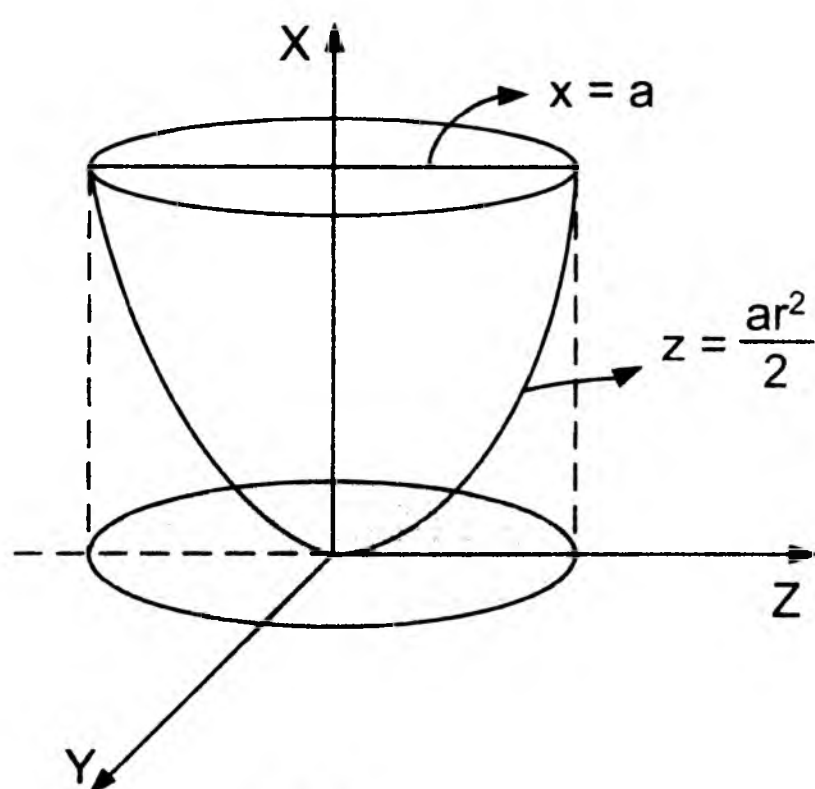
$$= -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(a^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} - a^3] d\theta = -\frac{2a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \theta - 1) d\theta$$

$$= -\frac{2a^3}{3} \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} - \theta \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2a^3}{3} \left[\left(-\frac{\pi}{2} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} - 0 \right) \right] = \frac{a^3}{9} (3\pi - 4)$$

- 2264** Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$ y al plano $x = a$.

Desarrollo

Proyectando la intercepción



$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a}, \quad x = a$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2$$

$$\begin{cases} y = rb \cos \theta \\ z = rc \sin \theta \\ x = x \end{cases} \quad \text{de donde } J(r, \theta, x) = bcr$$

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{ar^2}{2}}^a r dz \right) dr \right) d\theta$$

2264 1 Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

Desarrollo

Mediante coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = a \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = b \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = c \rho \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow J(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin \varphi$$

reemplazando las coordenadas esféricas en la ecuación

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

$$\rho^4 = \rho^2 (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)$$

$$\rho^2 = \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \Rightarrow \rho = \sqrt{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\sqrt{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}} abc \rho^3 \sin \varphi d\rho \right) d\varphi \right) d\theta \\
 &= \frac{abc}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \rho^3 \sin \varphi \Big|_0^{\sqrt{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}} d\varphi \right) d\theta \\
 &= \frac{abc}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \sin \varphi d\varphi \right) d\theta \\
 V &= \frac{abc}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi \right) d\theta \\
 V &= \frac{abc\pi^2}{4\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

- 2 Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (z \geq 0)$$

Desarrollo

Proyectando al plano XY la intercepción.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow z = c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a\rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = b\rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = c\rho \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow J(\rho, \varphi, \theta) = abc \rho^2 \sin \varphi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2 \Rightarrow \rho^2 = 2 \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 \cos^2 \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} abc \rho^2 \sin \varphi d\rho \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{abc}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^3 \sin \varphi \Big|_0^{\sqrt{2}} d\varphi \right) d\theta = \frac{2\sqrt{2}abc}{3} \int_0^{2\pi} -\cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= \frac{2\sqrt{2}abc}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) 2\pi = \frac{4abc}{3} (\sqrt{2} - 1)\pi \}$$

$$V = \frac{4abc(\sqrt{2} - 1)\pi}{3}$$

C) APLICACIONES DE LAS INTEGRALES TRIPLES A LA MECANICA Y A LA FÍSICA.

2265 Hallar la masa M del paralelepípedo rectangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$ si la densidad en el punto (x,y,z) es $\rho(x,y,z) = x + y + z$.

Desarrollo

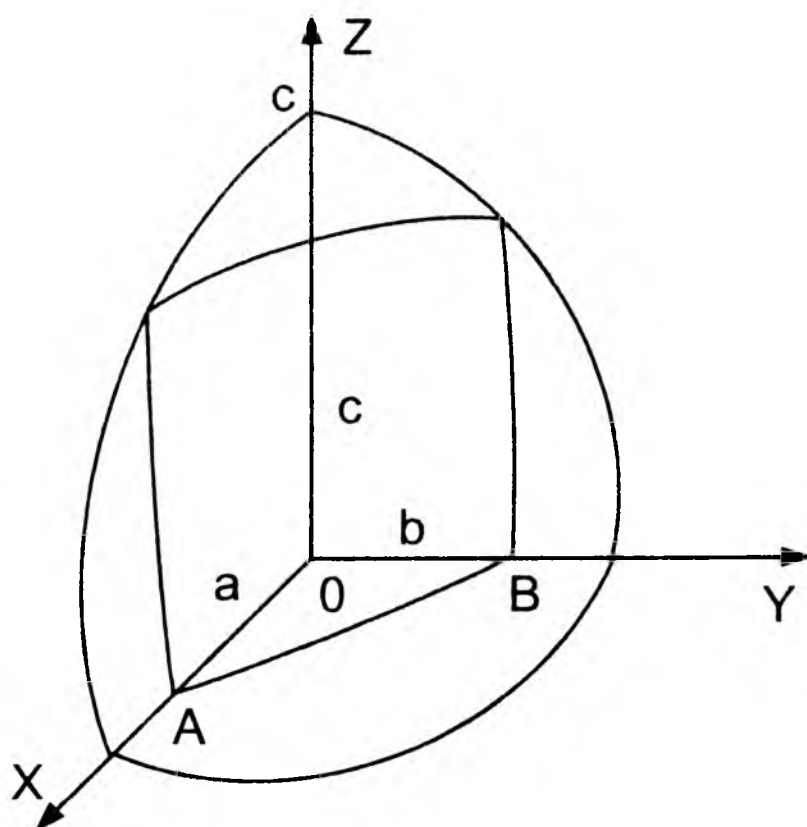
$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a \left(\int_0^b \left(\int_0^c (x + y + z) dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^b \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right] \Big|_0^c dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^b \left[(x + y)c + \frac{c^2}{2} \right] dy \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(xyc + \frac{y^2 c}{2} + \frac{c^2 y}{2} \right) \Big|_0^b dx = \int_0^a \left(xbc + \frac{b^2 c}{2} + \frac{bc^2}{2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2 bc}{2} + \frac{b^2 cx}{2} + \frac{bc^2 x}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{abc}{2} (a + b + c)$$

- 2266** Del octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, se ha cortado el cuerpo OABC, limitado por los planos coordenadas y por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, ($a \leq c$, $b \leq c$).



Desarrollo

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

La ecuación del plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a \leq c$, $b \leq c$ por definición

$$M = \iiint dm = \iiint \rho dV = \iiint z dV \quad \text{donde } \rho(x,y,z) = z, \quad dV = dx dy dz$$

$$M = \iiint z \, dx \, dy \, dz \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b(1 - \frac{x}{a}) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{c^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$M = \int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(\int_0^{\sqrt{c^2-x^2-y^2}} z \, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{c^2-x^2-y^2}} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (c^2 - x^2 - y^2) dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \left[(c^2 - x^2)y - \frac{y^3}{3} \right] \Big|_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx = \frac{b}{2} \int_0^a \left[c^2(1-\frac{x}{a}) - x^2(1-\frac{x}{a}) - \frac{b^2}{3}(1-\frac{x}{a})^3 \right] dx$$

$$M = \frac{b}{2} \left[-\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{4} + \frac{ac^2}{2} - \frac{ab^2}{12} \right]$$

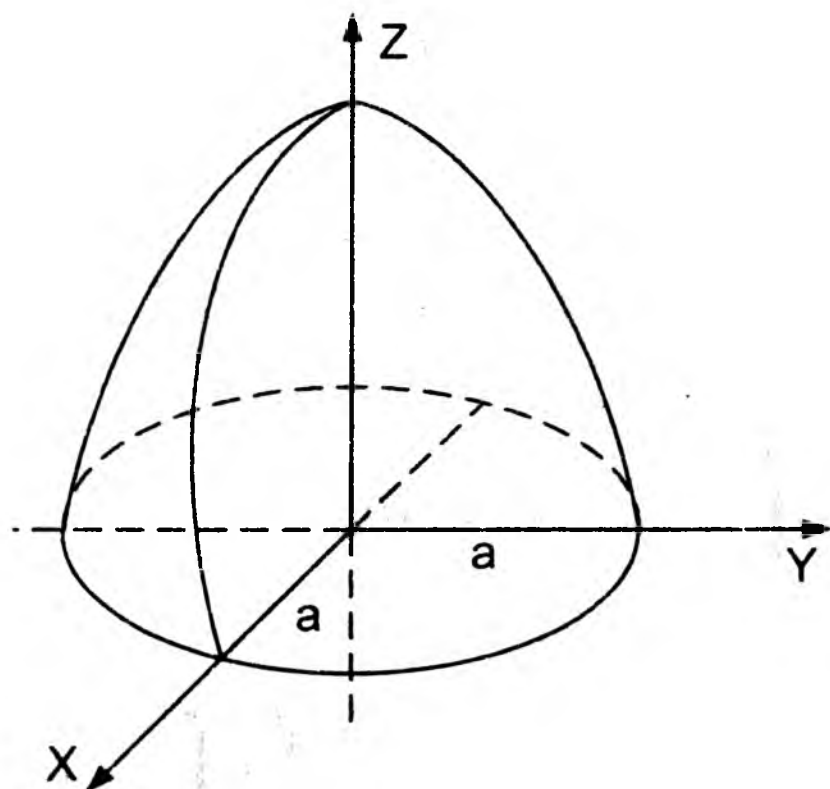
$$M = \frac{ab}{24} (-a^2 + 6c^2 - b^2) = \frac{ab}{24} (6c^2 - a^2 - b^2)$$

- 2267** En el cuerpo de forma semiesférica $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, la densidad varia proporcionalmente a la distancia desde el punto al centro. Hallar el centro de gravedad de este cuerpo.

Desarrollo

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \, z \geq 0 \quad \text{por dato} \quad \rho(\vec{r}) = kr$$

$$\text{por definición} \quad \vec{r}_M = \frac{1}{M} \iiint_V \vec{r} \, dm \quad \text{donde} \quad M = \iiint_V \rho \, dV$$



$$\vec{r}_M = \frac{1}{M} \iiint_{\partial V} \vec{r} \rho dV = \frac{1}{M} \iiint_{\partial V} \vec{r} kr dV$$

donde ∂V es el volumen que encierra la masa M , en coordenadas polares

$$\vec{r} = r(\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \text{sen } \phi, \cos \theta), \text{ donde } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a kr^2 (\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \text{sen } \phi, \cos \theta) \cdot r^2 \text{sen } \theta dr d\theta d\phi$$

$$M \bar{x}_{CM} = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} kr^4 dr \right) \text{sen}^2 \theta d\theta \right) \cos \phi d\phi = 0$$

$$M \bar{y}_{CM} = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} kr^4 dr \right) \text{sen}^2 \theta d\theta \right) \text{sen } \phi d\phi = 0$$

$$M \bar{z}_{CM} = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} kr^4 \cos \theta \text{sen } \theta d\theta d\phi dr$$

$$= \frac{2\pi \sin^2 \theta}{a} \left/ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{kr^5}{5} \right/_0^a = \frac{k\pi a^5}{5}$$

$$M = \iiint_{\partial V} dm = \iiint_{\partial V} \rho dV = k \iiint_{\partial V} r^3 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$M = k \cdot \frac{a^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{k\pi a^4}{2} ; \quad z_{CM} = \frac{\frac{k\pi a^5}{5}}{\frac{k\pi a^4}{2}} = \frac{2a}{5}$$

$$\therefore x_{CM} = y_{CM} = 0, \quad z_{CM} = \frac{2a}{5}$$

2268 Hallar el centro de gravedad del cuerpo limitado por el paraboloide $y^2 + 2z^2 = 4x$ y por el plano $x = 2$.

Desarrollo

$$\text{Sea } \partial V : \begin{cases} y^2 + 2z^2 = 4x \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{de donde } y^2 + \frac{z^2}{\frac{1}{2}} = 4x$$

En el problema no da la función de densidad se asume que esta es constante, es decir $\rho(x,y,z) = \rho$ por definición:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \iiint_{\partial V} \vec{r} dm = \frac{1}{M} \iiint_{\partial V} \vec{r} \rho dV$$

$$\text{donde también por definición } M = \iiint_{\partial V} \rho dV$$

$$\vec{r}_{CM} = \left(\frac{1}{\iiint_{\partial V} \rho dV} \right) \iiint_{\partial V} \vec{r} \rho dV = \frac{\iiint_{\partial V} \vec{r} dV}{\iiint_{\partial V} dV}$$

$$\iiint_{\partial V} dV = \int_0^2 A(x) dx \quad \text{donde } A(x) \text{ es el área de la de la elipse}$$

correspondiente a la intersección del plano $x = x$ con ∂V

$$\frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{2x} = 1 \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a = 2\sqrt{x} \\ b = \sqrt{2x} \end{cases}, \quad A(x) = 2\pi\sqrt{2}x$$

$$A(x) = 2\pi\sqrt{2}x \Rightarrow \iiint_{\partial V} dV = \int_0^2 2\pi\sqrt{2}x dx = 4\pi\sqrt{2}$$

$$\iiint_{\partial V} dV = V = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \left(\int_{-\sqrt{4x-2z^2}}^{\sqrt{4x-2z^2}} dy \right) dz \right) dx$$

$$V = 2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \sqrt{4x-2z^2} dz \right) dx = 2\sqrt{2}\pi \int_0^2 x dx \quad \therefore V = 4\sqrt{2}\pi$$

$$\text{por lo tanto} \quad x_{CM} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \iiint_{\partial V} x dV = \frac{16\sqrt{2} \frac{\pi}{3}}{4\sqrt{2}\pi} = \frac{4}{3}$$

$$x_{CM} = \frac{4}{3}, \quad y_{CM} = z_{CM} = 0 \quad \text{por simetría}$$

- 2269** Hallar el momento de inercia del cilindro circular, que tiene por altura h y por radio de la base a , con respecto al eje que sirve de diámetro de la base del propio cilindro.

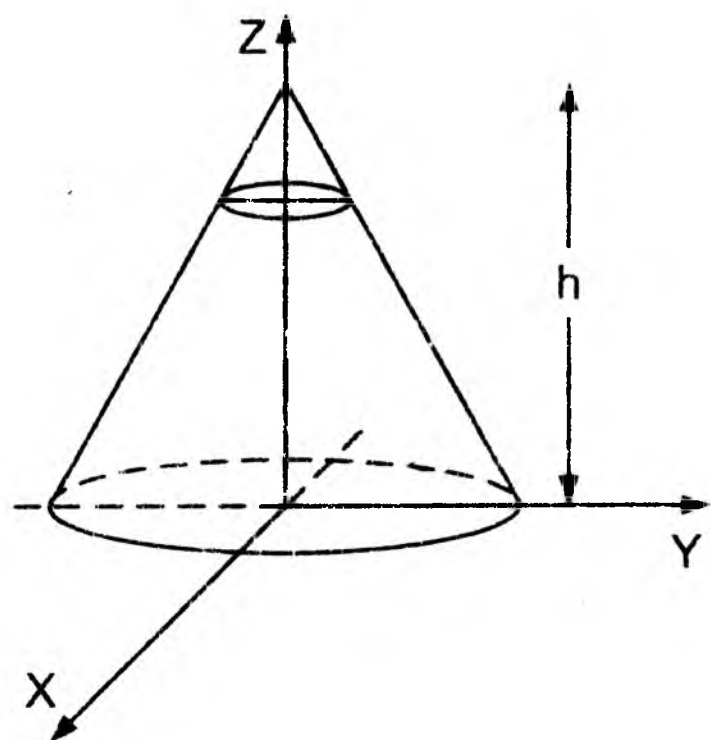
Desarrollo

$$I_x = \iiint_{\partial V} d^2 dm = \iiint_V (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) r d\varphi dr dz = \frac{\pi a^2 h}{12} (3a^2 + 4h^2)$$

El eje del cilindro se toma como eje OZ, al plano de la base del cilindro como plano XOY. El momento de inercia se calcula con respecto al eje OX. Después de pasar a las coordenadas cilíndricas, el cuadrado de la distancia del elemento $r d\varphi dr dz$ al eje OX es igual a $r^2 \sin^2 \varphi + z^2$.

- 2270** Hallar el momento de inercia del cono circular que tiene por altura h , por radio de la base a y de densidad ρ , con respecto al diámetro de su base.

Desarrollo



$$I_{yy} = \iiint_{\partial V} d^2 dm$$

$$I_{yy} = \iiint_{\partial V} d^2 \varphi dV$$

$$I_{yy} = \rho \iiint_{\partial V} d^2 dV$$

d = distancia del punto p al eje Y . En coordenadas cilíndricas

$$\vec{r} = (r \cos \phi, r \sin \phi, z) \Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$d(p, \text{eje } y) = |\vec{op} \times \vec{g}| = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$\vec{op} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -z \vec{i} + x \vec{k}$$

$$I_{yy} = \rho \iiint_{\partial V} (x^2 + z^2) dV = \rho \iiint_{\partial V} (r^2 \cos^2 \phi + z^2) r dr d\phi dz$$

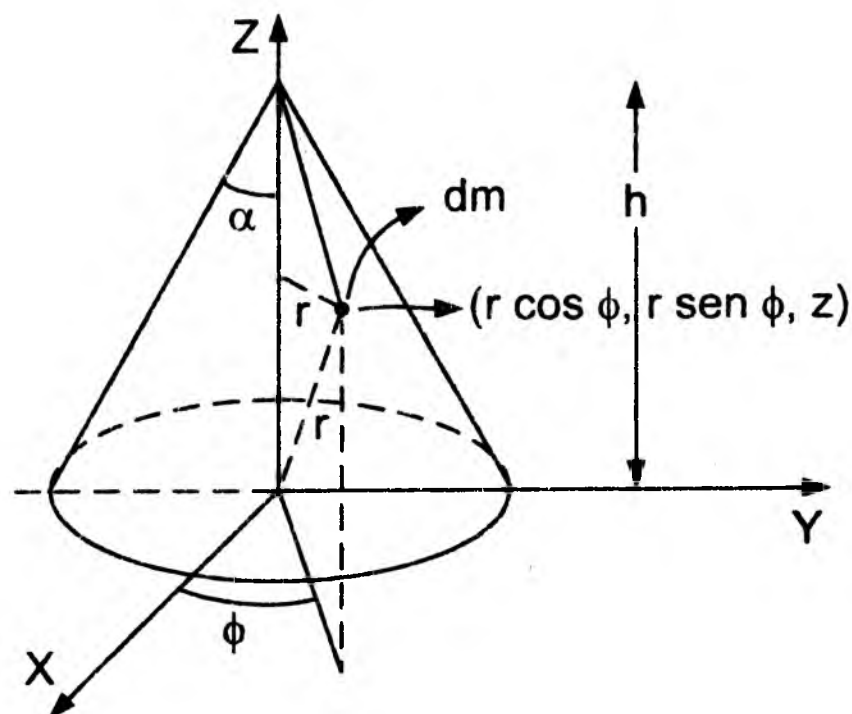
$$= \rho \int_0^H \left(\int_0^{a(1-\frac{z}{H})} \left(\int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \phi + z^2) r d\phi \right) dr \right) dz$$

$$= \rho 2\pi \int_0^H \left(\int_0^{a(1-\frac{z}{H})} r \left(\frac{r^2}{2} + z^2 \right) dr \right) dz$$

$$= 2\pi\rho \left(\frac{a^4 H}{40} + \frac{a^2 H^3}{60} \right) = \frac{\pi\rho H a^2}{60} (3a^2 + 2H^2)$$

- 2271** Hallar la atracción que ejerce el cono homogéneo, de altura h y ángulo en el vértice α (en la sección axial), sobre un punto material, que tenga una unidad de masa y que este situado en su vértice.

Desarrollo



M = masa del cono (se asume que la densidad por la ley de gravitación universal del cono es constante)

$$\vec{F}_{12} = \frac{-km_1m_2 \vec{u}_{12}}{r_{12}^2} \quad \text{donde } m_1 \text{ y } m_2 \text{ son masas puntuales y } r_{12} \text{ es la distancia}$$

$$\text{entre ellos, } k = \text{constante universal de gravitación} \quad \vec{F}_{12} = \frac{-km_1m_2 \vec{u}_{12}}{r_{12}^2} \quad \dots (1)$$

\vec{F}_{12} = fuerza de atracción de la masa m_1 sobre la masa m_2 , \vec{u}_{12} = vector unitario cuyo sentido va de m_1 a m_2

$$m_1 = dm, \quad m_2 = 1, \quad \vec{r}_{12} = (0, 0, h) - \vec{r}$$

en coordenadas cilíndricas $\vec{r} = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$

$$\vec{r}_{12} = (0, 0, h) - (r \cos \phi, r \sin \phi, z), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq h$$

$$0 \leq r \leq a(1 - \frac{z}{h})$$

$$d\vec{F}_{12} = \frac{k dm(r \cos \phi, r \sin \phi, z - h)}{[r^2 + (h - z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

para encontrar la fuerza total gravitacional del cono sobre la partícula de masa m debemos de integrar.

$$\vec{F}_{total} = \iiint_{\partial V} d\vec{F}_{12} = k \iiint_{\partial V} \frac{dm(r \cos \phi, r \sin \phi, z - h)}{[r^2 + (h - z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

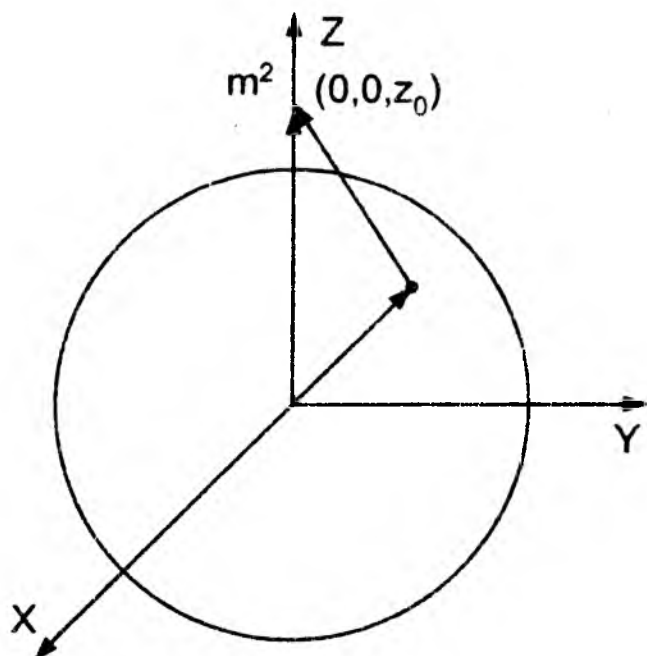
$$\vec{F}_{total} = k\rho \iiint_{\partial V} \frac{(r \cos \phi, r \sin \phi, z - h)r dr d\phi dz}{[r^2 + (z - h)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

es evidente que $F_x = F_y = 0$ porque $\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$

$$\begin{aligned}
 F_{z \text{ total}} &= k \rho \iint_{\partial V} \frac{(z-h) dr dz}{[r^2 + (z-h)^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= 2k\pi\rho \int_0^h (z-h) dz \int_0^{(h-z)\operatorname{tg} \alpha} \frac{r dr}{[r^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= 2\pi k \rho \int_0^h (z-h) \cdot \frac{(1-\cos \alpha)}{h-z} dz \\
 &= -2\pi k \rho (1-\cos \alpha) z \Big|_0^h = -2\pi k \rho h (1-\cos \alpha)
 \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{\text{total}} = -2\pi k \rho h (1-\cos \alpha) \vec{u}_z$$

- 2272** Demostrar, que la atracción que ejerce una esfera homogénea sobre un punto material exterior a ella no varia, si toda la masa de la esfera se concentra en su centro.



Desarrollo

$$d \vec{F}_{12} = -\frac{k m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

$$d \vec{F}_{12} = -\frac{k dm m}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

$$d \vec{F}_{12} = -\frac{k m}{r_{12}^3} \cdot \frac{M dV}{V} \vec{r}_{12}$$

$$= -\frac{kmM}{V} \cdot \frac{dV}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (0, 0, z_0) - (r \cos \theta, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi)$$

$$|\vec{r}_{12}| = r_{12} = [r^2 \sin^2 \theta + (z_0 - r \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}, \text{ entonces se tiene}$$

$$d\vec{F}_{12} = \frac{kmM}{V} \cdot \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}{[r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} (r \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta - z_0)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{total} &= \iiint_{\partial V} d\vec{F}_{12} \\ &= \iiint_{\partial V} \frac{kmM}{V} \cdot \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi (r \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta - z_0)}{[r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

es obvio que $F_{x \text{ total}} = F_{y \text{ total}} = 0$ ($\int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$)

$$F_{z \text{ total}} = \frac{kmM}{V} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin \theta (r \cos \theta - z_0) dr d\theta d\phi}{[r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2\pi kmM}{V} \int_0^R \left(\int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta (r \cos \theta - z_0) d\theta}{(r^2 + z_0^2 - 2rz_0 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right) dr$$

$$= \frac{2\pi kmM}{V} \int_0^R -\frac{2}{z_0^2} r^2 dr = -\frac{4\pi kmM}{V z_0^2} \int_0^R r^2 dr$$

$$= -\frac{4\pi kMm}{Vz_0^2} \cdot \frac{R^3}{3} = -\frac{4\pi kMm}{\frac{4\pi}{3} R^3 z_0^2} \cdot \frac{R^3}{3}$$

$$F_{z \text{ total}} = -\frac{kMm}{z_0^2} \quad \dots (\alpha)$$

además la fuerza entre dos masas puntuales

$$F_z = -\frac{kMm}{z_0^2} \quad \dots (\beta)$$

por lo tanto (α) y (β) son exactamente iguales las expresiones.

7.8. INTEGRALES IMPROPRIAS, DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO. INTEGRALES IMPROPIAS MULTIPLES

1ra. DERIVADA RESPECTO DEL PARÁMETRO.-

Cumpliendo ciertas restricciones que se impone a las funciones $f(x, \alpha)$ y $f'_\alpha(x, \alpha)$ y a las correspondientes integrales impropias, se verifica la regla de Leibniz.

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^\infty f(x, \alpha) dx = \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha) dx$$

2do. INTEGRALES DOBLES IMPROPIAS.-

a) CASO EN QUE EL RECINTO DE INTEGRACIÓN ES INFINITO.-

Si la función $f(x, y)$ es continua en un recinto infinito S , se supone.

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{C \rightarrow S} \iint_C f(x, y) dx dy \quad \dots (1)$$

donde C es un recinto finito, situado totalmente en S , entendiéndose por $C \rightarrow S$, que ampliamos el recinto C según una ley arbitraria, de manera que en este entre y permanezca en el cualquier punto del recinto S .

Si el segundo miembro tiene límite y éste no depende de la elección que se haga de C , la correspondiente integral impropia recibe el nombre de convergente; en el caso contrario se llama divergente.

Si la función subintegral $f(x,y)$ no es negativa ($f(x,y) \geq 0$), para que la integral impropia sea convergente es necesario y suficiente que exista el límite del segundo miembro de la igualdad (1), aunque sea para un sistema de recintos C que completen el recinto S .

b) CASO DE UNA FUNCIÓN DISCONTINUA.-

Si la función $f(x,y)$ es continua en todo recinto cerrado y acotado S , a excepción del punto $P(a,b)$, se supone.

$$\boxed{\iint_{(S)} f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} f(x,y) dx dy} \quad \dots (2)$$

donde S_ε es el recinto que resulta de excluir del S un recinto interior pequeño de diámetro ε que contiene al punto P . En el caso de que exista el límite (2) y de que no dependa de la forma de los recintos interiores pequeños que se excluyan del recinto S , la integral considerada se llama convergente, mientras que en el caso contrario, es divergente.

Si $f(x,y) \geq 0$, el límite del segundo miembro de la igualdad (2) no depende de la forma de los recintos internos que se excluyen de S ; en particular, en calidad de tales recintos pueden tomarse círculos de radio $\frac{\varepsilon}{2}$ con centro en el punto P .

El concepto de integrales impropias dobles es fácil pasarlo al caso de integrales triples.

2273 Hallar $f'(x)$, si $f(x) = \int_x^\infty e^{-xy^2} dy$, $x > 0$

Desarrollo

$$f(x) = \int_x^\infty e^{-xy^2} dy = - \int_a^x e^{-xy^2} dy + \int_a^\infty e^{-xy^2} dy, \text{ calculando la derivada}$$

$$f'(x) = -e^{-x^3} - \int_a^\infty y^2 e^{-xy^2} dy$$

2274 Demostrar, que la función $u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x f(z) dz}{x^2 + (y-z)^2}$ satisface a la ecuación de

laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Desarrollo

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x f(z) dz}{x^2 + (y-z)^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{((y-z)^2 - x^2) f(z)}{[x^2 + (y-z)^2]^2} dz$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[3(y-z)^2 - x^2] x f(z)}{[x^2 + (y-z)^2]^3} dz \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-z) x f(z) dz}{[x^2 + (y-z)^2]^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[3(y-z)^2 - x^2] x f(z) dz}{[x^2 + (y-z)^2]^3} \quad \dots (2)$$

ahora sumando (1) y (2) se tiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[3(y-z)^2 - x^2]x f(z) dz}{[x^2 + (y-z)^2]^3} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[3(y-z)^2 - x^2]x f(z) dz}{[x^2 + (y-z)^2]^3} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2275 La transformada de Laplace $F(p)$ para la función $f(t)$ se determina por la fórmula $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$. Hallar $F(p)$ si

a) $f(t) = 1$ b) $f(t) = e^{\alpha t}$ c) $f(t) = \text{sen } \beta t$ d) $f(t) = \text{cos } \beta t$

Desarrollo

a) $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p}(0-1) = \frac{1}{p}$

$$\therefore F(p) = \frac{1}{p}$$

b) $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-\beta)t} dt$

$$= \frac{e^{(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{\alpha-p} = \frac{1}{p-\alpha}$$

c) $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \text{sen } \beta t dt$

$$F(p) = e^{-pt} \left(\frac{-p \text{sen } \beta t - \beta \text{cos } \beta t}{p^2 + \beta^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$$

2276 Aplicando la fórmula $\int_0^1 x^{n-1} \ln x \, dx = \frac{1}{n}$, $n > 0$, calcular la integral

$$\int_0^1 x^{n-1} \ln x \, dx$$

Desarrollo

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^{n-1} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^n}{n} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^{n-1} \ln x \, dx = \frac{x^n \ln x}{n} \Big|_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = 0 - \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \int_0^1 x^{n-1} \ln x \, dx = -\frac{1}{n^2}$$

2277 Aplicando la fórmula $\int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$, $p > 0$, calcular la integral $\int_0^\infty t^2 e^{-pt} dt$

Desarrollo

$$\begin{cases} u = t^2 \\ dv = e^{-pt} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2t \, dt \\ v = -\frac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^2 dt = -\frac{t^2 e^{-pt}}{p} \Big|_0^\infty + \frac{2}{p} \int_0^\infty t e^{-pt} dt = \frac{2}{p} \int_0^\infty t e^{-pt} dt$$

$$\begin{cases} u = t \\ dv = e^{-pt} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\frac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^2 dt = \frac{2}{p} \left[-\frac{te^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \right] = \frac{2}{p} \left[0 + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} \right) \right] = \frac{2}{p^3}$$

Utilizando la derivación respecto al parámetro, calcular las siguientes integrales.

2278 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, (\alpha > 0, \beta > 0)$

Desarrollo

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} dx}_{F(\alpha)} - \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{x} dx}_{F(\beta)} \quad \dots (1)$$

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} dx \Rightarrow F'(\alpha) = - \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} \Rightarrow F(\alpha) = -\ln \alpha \quad \dots (2)$$

$$F(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{x} dx \Rightarrow F'(\beta) = - \int_0^{\infty} e^{-\beta x} dx = -\frac{1}{\beta} \Rightarrow F(\beta) = -\ln \beta \quad \dots (3)$$

Reemplazando (2), (3) en (1)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = -\ln \alpha + \ln \beta = \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

2279 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen} mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$

Desarrollo

$$L\{\operatorname{sen} mx\} = \frac{m}{s^2 + m^2} \Rightarrow L\left\{\frac{\operatorname{sen} mx}{x}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{m}{u^2 + m^2} dy$$

$$L\{\operatorname{sen} mx\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{m}$$

$$L\left\{\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen} mx\right\} = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s+\alpha}{m}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s+\beta}{m}\right)$$

$$L\left\{\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen}(mx) dx\right\} = \operatorname{arctg} \frac{s+\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{s+\alpha}{m}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen}(mx) dx = \operatorname{arctg} \frac{s+\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{s+\alpha}{m}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen}(mx) dx &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\operatorname{arctg} \frac{s+\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{s+\alpha}{m} \right) \\ &= \operatorname{arctg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{m} \end{aligned}$$

2280 $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} dx$

Desarrollo

Sea $F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} dx$, derivando

$$F'(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+\alpha^2 x^2)}$$

$$F'(\alpha) = \int_0^{\infty} \left(\frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{1+\alpha^2 x^2} \right) dx = \frac{1}{1-\alpha^2} [\operatorname{arctg} x - \alpha \operatorname{arctg} \alpha x] \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha^2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2(1+\alpha)} \quad \therefore F(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln(1+\alpha)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \ln(1+\alpha)$$

2281 $\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$

Desarrollo

Sea $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$, derivando se tiene:

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= -2\alpha \int_0^1 \frac{dx}{(1-\alpha^2 x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\alpha \int_0^1 \frac{dx}{(\alpha x+1)\sqrt{1-x^2}} + \alpha \int_0^1 \frac{dx}{(\alpha x-1)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(\alpha x+1)\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\alpha^2-1} \ln(\alpha^2+\alpha-1) \quad \dots (2)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(\alpha x-1)\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\alpha^2-1} \ln(\alpha^2-\alpha-1) \quad \dots (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1)

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= -\alpha[\sqrt{\alpha^2-1} \ln(\alpha^2+\alpha-1) - \sqrt{\alpha^2-1} \ln(\alpha^2-\alpha-1)] \\ &= -\alpha\sqrt{\alpha^2-1} \ln\left(\frac{\alpha^2+\alpha-1}{\alpha^2-\alpha-1}\right) \end{aligned}$$

de donde $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$

Sea $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow dx dy = r dr d\theta$

Pasando a coordenadas polares se tiene: $\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^2}$

2287 La integral de Euler – Poisson, determinada por la fórmula $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$, se

puede escribir también en la forma $I = \int_0^\infty e^{-y^2} dy$ multiplicando entre sí estas fórmulas y pasando después a las coordenadas polares, calcular I.

Desarrollo

$$I_p = \int_0^p e^{-x^2} dx = \int_0^p e^{-y^2} dy$$

y sea $I = \lim_{p \rightarrow \infty} I_p$ el valor de la integral

$$\text{Luego } I_p^2 = \int_0^p e^{-x^2} dx \int_0^p e^{-y^2} dy = \underbrace{\int_0^p \int_0^p e^{-x^2-y^2} dx dy}_{RP}$$

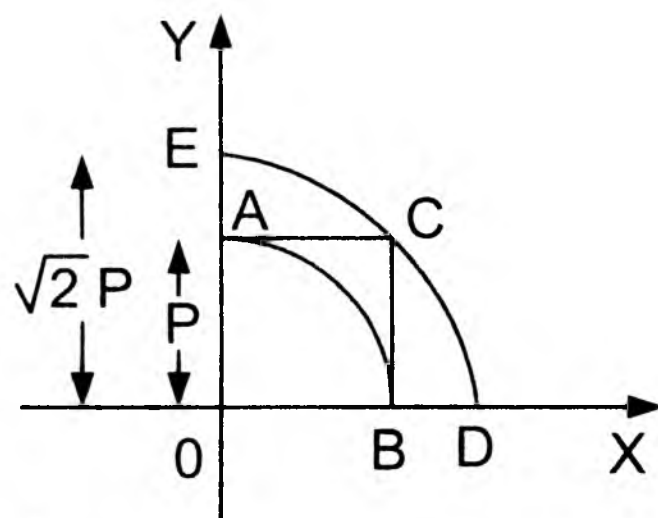
Donde R_p es el cuadrado OABC de lado P

Sea R_1 la región del primer cuadrante comprendida por la circunferencia de

radio P, es decir: $\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

Y R_2 la región del primer cuadrante correspondiente por la circunferencia de

radio $\sqrt{2}p$, es decir: $\iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, luego



$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I_p^2 \leq \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

por medio de coordenadas polares se tiene: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow dx dy = r dr d\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^p e^{-r^2} r dr \right) d\theta \leq I_p^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}p} e^{-r^2} r dr \right) d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^p d\theta \leq I_p^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^{\sqrt{2}p} d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-p^2}}{2} d\theta \leq I_p^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^{-2p^2}}{2} d\theta$$

$\frac{\pi}{4}(1-e^{-p^2}) \leq I_p^2 \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2p^2})$, tomando limite cuando $p \rightarrow \infty$ se tiene:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4}(1-e^{-p^2}) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} I_p^2 \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4}(1-e^{-2p^2})$$

$$\frac{\pi}{4} \leq I^2 \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{de donde} \quad I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2288 Calcular $\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$

Desarrollo

Pasando a coordenadas esféricas se tiene:

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\rho \frac{\rho^2 \sin \phi}{(\rho^2 + 1)^2} d\rho \right) d\phi \right) d\theta = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Averiguar si convergen las integrales dobles impropias.

2289 $\iint_S \ln(x^2 + y^2) dx dy$, donde S es el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$

Desarrollo

Excluimos de S el origen de coordenadas con su entorno de amplitud ε , es

decir examinamos $I_\varepsilon = \iint_{S_\varepsilon} \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, donde el recinto que se excluye

es un círculo de radio ε con centro en el origen de coordenadas, pasando a las coordenadas polares tenemos:

$$I_\varepsilon = \iint_{S_\varepsilon} \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \ln r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_\varepsilon^1 - \frac{1}{2} \int_\varepsilon^1 r dr \right] d\theta$$

$$= 2\pi \left[\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2} \ln \varepsilon - \frac{1}{4} \right] \quad \text{de donde} \quad I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \iint_S \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = -\frac{\pi}{2}$$

- 2290** $\iint_S \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$, donde S es un recinto que se determina por la desigualdad $x^2 + y^2 \geq 1$ (parte exterior del círculo).

Desarrollo

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^\infty \frac{r dr}{r^{2\alpha}} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^\infty \frac{dr}{r^{2\alpha-1}} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{(2\alpha-2)r^{2\alpha-2}} \Big|_1^\infty d\theta = \int_0^{2\pi} \left(0 + \frac{1}{2\alpha-2} \right) d\theta \text{ cuando } 2\alpha - 2 > 0 \\ &= \frac{\pi}{\alpha-1} \text{ si } \alpha > 1 \end{aligned}$$

Luego $\iint_S \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\pi}{\alpha-1}$ es convergente si $\alpha > 1$

- 2291** $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$, donde S es un cuadrado $|x| \leq 1, |y| \leq 1$

Desarrollo

Ponemos a la recta $y = x$ con una franja estrecha y supongamos

$$\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\int_0^{\alpha-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} \right) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\int_{\alpha+\varepsilon}^1 \frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} \right) dx$$

Los dos límites existen por lo tanto $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$ es convergente.

- 2292 $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$, donde V es un recinto, que se determina por la desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ (parte exterior de la esfera)

Desarrollo

Pasando a coordenadas esféricas se tiene:

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_1^\infty \frac{\rho^2 \sin \phi d\rho}{\rho^{2\alpha}} \right) d\phi \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi -\frac{\sin \phi}{(2\alpha-3)\rho^{2\alpha-3}} \Big|_1^\infty d\phi \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \frac{\sin \phi}{2\alpha-3} d\phi \right) d\theta \quad \text{si } 2\alpha-3 > 0 \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\cos \phi}{2\alpha-3} \Big|_0^\pi d\theta \end{aligned}$$

$$\text{si } \alpha > \frac{3}{2} = -\frac{2}{2\alpha-3} \cdot 2\pi \quad \text{si } \alpha > \frac{3}{2}$$

$$\text{Luego } \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} = -\frac{4\pi}{2\alpha-3} \quad \text{si } \alpha > \frac{3}{2}$$

Por lo tanto es convergente si $\alpha > \frac{3}{2}$

7.9. INTEGRALES CURVILÍNEAS.-

1ra. INTEGRALES CURVILÍNEAS DE PRIMER TIPO.-

Sea $f(x,y)$ una función continua e $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, la ecuación de una curva plana determinada C. Marcamos un sistema de puntos $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$), que dividen a la curva C en arcos elementales $M_{i-1}M_i = \Delta S_i$ y formamos la suma integral.

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i. \text{ El limite de esta suma, cuando } n \rightarrow \infty \text{ y } \Delta S_i \rightarrow 0$$

recibe el nombre de integral curvilínea de primer tipo.

$$\int_C f(x, y) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

(dS es la diferencial del arco) y se calcula por la fórmula

$$\int_C f(x, y) dS = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx$$

En el caso de que la curva C esté dada en forma paramétrica $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, ($\alpha \leq t \leq \beta$) tenemos

$$\int_C f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

Se considera también las integrales curvilíneas de primer tipo de funciones de tres variables $f(x, y, z)$, tomadas sobre una curva en el espacio, que se calculan análogamente.

La integral curvilínea de primer tipo no depende del sentido del camino de integración. Si la función sub integral f se interpreta como la densidad lineal de la curva de integración C esta integral representará de por sí la masa de curva C .

2do. INTEGRALES CURVILÍNEAS DE SEGUNDO TIPO.-

Si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones continuas e $y = \varphi(x)$ es una curva plana C , que se recorre al variar x desde a hasta b , la correspondiente integral curvilínea de segundo tipo se expresa de la forma siguiente:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)] dx$$

En el caso más general, cuando la curva C se da en la forma paramétrica $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, donde t varia de α hasta β , tenemos:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt$$

Fórmulas análogas son validas para la integral curvilínea de segundo tipo tomada sobre una curva en el espacio.

3er. CASO DE INTEGRAL EXACTA.-

Si la expresión subintegral de la integral curvilínea de segundo tipo es la diferencial exacta de una función uniforme determinada $U = u(x,y)$, es decir:

$P(x,y) dx + Q(x,y) dy = du(x,y)$ esta integral curvilínea no depende del camino de integración y se cumple la fórmula de Newton – Leibniz.

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) \quad \dots (1)$$

donde (x_1, y_1) es el punto inicial y (x_2, y_2) , el punto final del camino. En particular, si el contorno de integración C es cerrado se tiene:

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \dots (2)$$

Si, 1) el contorno de integración C está comprendido totalmente en un determinado recinto simplemente conexo S y 2) las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ junto con sus derivadas parciales de 1er orden, son continuas en el recinto S , la condición necesaria y suficiente para la existencia de la función u es que se verifique idénticamente en todo el recinto S la igualdad .

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \dots (3)$$

Si no se cumple la condición (1) y (2), la subsistencia de la condición (3) no garantiza a la existencia de la función uniforme u y las fórmulas (1) y (2) pueden resultar ser erróneas.

Señalemos un procedimiento para hallar la función $u(x, y)$ por medio de su diferencial exacta, basado en el empleo de las integrales curvilíneas.

4to. FÓRMULAS DE GREEN PARA EL PLANO.-

- ① Si C es la frontera del recinto S y las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas, junto con sus derivadas parciales de 1er orden, en el recinto cerrado $S + C$. Se verifica la fórmula de Green.

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde el sentido del recorrido del contorno C se eligen de forma que el recinto S queda a la izquierda.

5to. APLICACIONES DE LAS INTEGRALES CURVILÍNEAS.-

El área limitada por un contorno cerrado C , es igual a:

$$S = -\oint_C y dx = \oint_C x dy$$

(el sentido del recorrido del contorno debe elegirse contrario al movimiento de las agujas del reloj).

Más útil para las aplicaciones en la siguiente fórmula.

$$S = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \oint_C x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$$

- ② El trabajo de una fuerza, cuyas proyecciones sean $X = x(x,y,z)$, $Y = y(x,y,z)$, $Z = z(x,y,z)$ (o correspondientemente, el trabajo de un campo de fuerzas) a lo largo del camino de C , se expresa por la integral.

$$A = \int_C x dx + y dy + z dz$$

Si la fuerza tiene potencial, es decir, si existe una función $U = u(x,y,z)$

(función potencial o de fuerza) tal que: $\frac{\partial u}{\partial x} = x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = z$

El trabajo independientemente de la forma del camino C , es igual a:

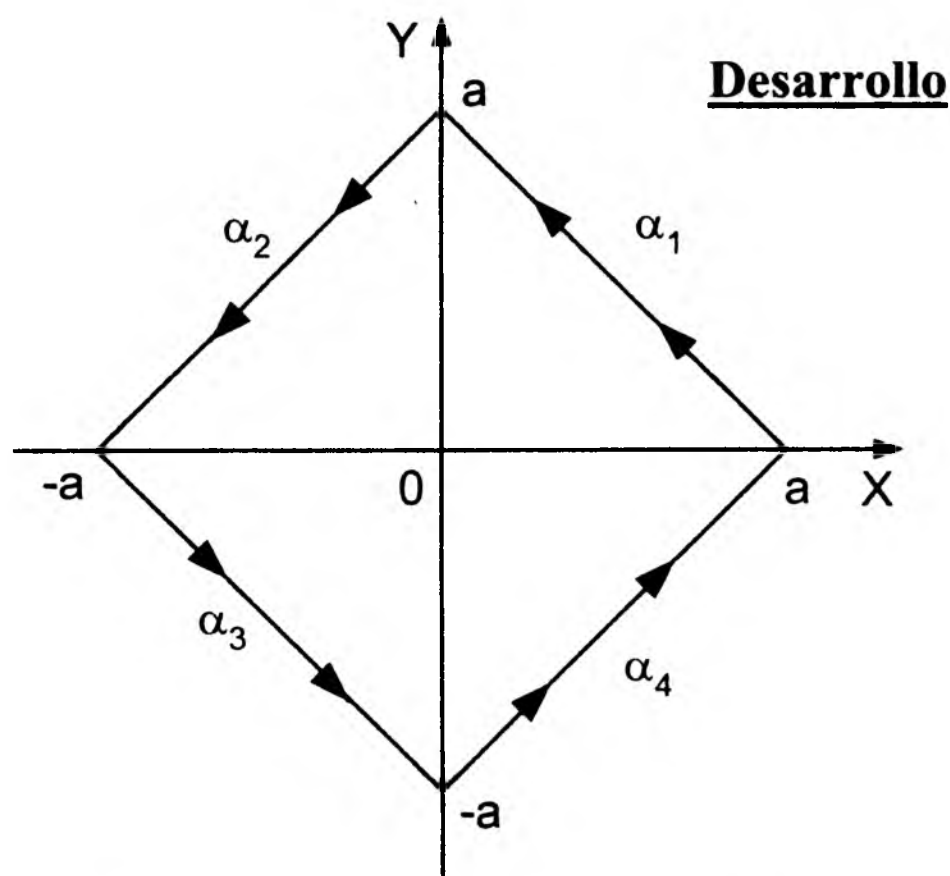
$$A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} x dx + y dy + z dz = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} du = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1)$$

donde (x_1, y_1, z_1) es el punto inicial y (x_2, y_2, z_2) el punto final del camino.

A) INTEGRALES CURVILÍNEAS DE PRIMER TIPO.-

Calcular las siguientes integrales curvilíneas.

2293 $\int_C xy dS$, donde C es el contorno del cuadrado $|x| + |y| = a$, $a > 0$



$$\alpha_1(t) = (a - at, at), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\alpha_2(t) = (-at, a - at), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\alpha_3(t) = (-a + at, -at), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\alpha_4(t) = (at, -a + at), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{\alpha}_1'(t) = (-a, a) \Rightarrow |\vec{\alpha}_1'(t)| = \sqrt{2}a$$

$$\vec{\alpha}_2'(t) = (-a, -a) \Rightarrow |\vec{\alpha}_2'(t)| = \sqrt{2}a$$

$$\vec{\alpha}_3'(t) = (a, -a) \Rightarrow |\vec{\alpha}_3'(t)| = \sqrt{2}a$$

$$\vec{\alpha}_4'(t) = (a, a) \Rightarrow |\vec{\alpha}_4'(t)| = \sqrt{2}a$$

$$\int_C xy dS = \int_{C_1} xy dS + \int_{C_2} xy dS + \int_{C_3} xy dS + \int_{C_4} xy dS$$

$$= \int_0^1 (a - at)at\sqrt{2}a dt + \int_0^1 -at(a - at)\sqrt{2}a dt +$$

$$+ \int_0^1 -at(-a + at)\sqrt{2}a \, dt + \int_0^1 at(-a + at)\sqrt{2}a \, dt$$

$$\begin{aligned} \int_C xy \, dS &= a^3 \sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right] \Big|_0^1 + \sqrt{2} a^3 \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \\ &\quad + \sqrt{2} a^3 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 + a^3 \sqrt{2} \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C xy \, dS &= \sqrt{2} a^3 \left[\frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right] \Big|_0^1 \\ &= \sqrt{2} a^3 (t^2 - t^2 + t^3 - t^3) \Big|_0^1 = 0 \end{aligned}$$

- 2294** $\int_C \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, donde C es un segmento de recta que une entre si los puntos O(0,0) y A(1,2).

Desarrollo

$$\text{Sea } \alpha(t) = (t, 2t) \Rightarrow \alpha'(t) = (1, 2) \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{5}$$

$$\alpha(a) = (a, 2a) = (0, 0) \Rightarrow a = 0$$

$$\alpha(b) = (b, 2b) = (1, 2) \Rightarrow b = 1$$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{5} \, dt}{\sqrt{t^2 + 4t^2 + 4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5} \, dt}{\sqrt{5t^2 + 4}} = \ln |\sqrt{5}t + \sqrt{5t^2 + 4}| \Big|_0^1 \\ &= \ln |\sqrt{5} + 3| - \ln |0 + 2| = \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \right| \end{aligned}$$

2295 $\int_C xy dS$, donde C es el cuadrante de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, situado en el primer cuadrante.

Desarrollo

Sea $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t) \Rightarrow \alpha'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

$$\begin{aligned} \int_C xy dS &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(a^2 - b^2) \cos t \sin t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \cdot \frac{2}{3} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} [(a^2)^{\frac{3}{2}} - (b^2)^{\frac{3}{2}}] = \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} \end{aligned}$$

2296 $\int_C y^2 dS$, donde C es el primer arco de la cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Desarrollo

Sea $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\alpha'(t) = (a(1 - \cos t), a \sin t) \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos t}$$

$$\int_C y^2 dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (1 - \cos t)^2 \sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^4 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt$$

$$\begin{aligned}
 \int_C y^2 dS &= 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \frac{t}{2})^2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt \\
 &= 8a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos^2 \frac{t}{2} + \cos^4 \frac{t}{2}) \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt \\
 &= 8a^3 \left(-2\cos \frac{t}{2} + \frac{4}{3}\cos^3 \frac{t}{2} - \frac{2}{5}\cos^5 \frac{t}{2} \right) \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{256}{15} a^3
 \end{aligned}$$

2297 $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} dS$, donde C es el arco de la envolvente de la circunferencia
 $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

Desarrollo

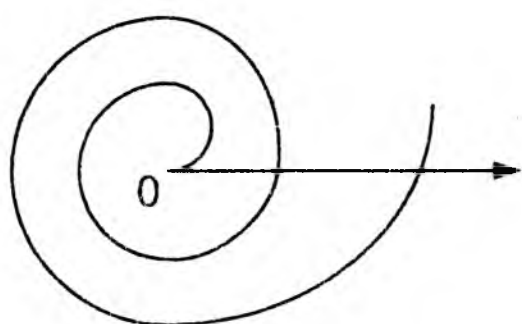
$$\alpha(t) = (a(\cos t + t \operatorname{sen} t), a(\operatorname{sen} t - t \cos t)) \Rightarrow \alpha'(t) = (at \cos t, at \operatorname{sen} t)$$

$$dS = |\alpha'(t)| dt = \sqrt{a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \operatorname{sen}^2 t} = at dt$$

$$\begin{aligned}
 \int_C \sqrt{x^2 + y^2} dS &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (\cos t + t \operatorname{sen} t)^2 + a^2 (\operatorname{sen} t - t \cos t)^2} at dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} t dt = \frac{a^2}{3} (1 + t^2)^{\frac{3}{2}} \Big/_0^{2\pi} = \frac{a^2}{3} [(1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1]
 \end{aligned}$$

2298 $\int_C (x^2 + y^2)^2 dS$, donde C es el arco de la espiral logarítmica $r = ae^{m\varphi}$
 ($m > 0$) desde el punto $A(0, a)$ hasta el punto $O(-\infty, 0)$.

Desarrollo



$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\begin{cases} x = ae^{m\varphi} \cos \varphi \\ y = ae^{m\varphi} \sin \varphi \end{cases}$$

Sea $\alpha(\varphi) = (ae^{m\varphi} \cos \varphi, ae^{m\varphi} \sin \varphi)$, $-\infty < \varphi \leq \infty$

$$\alpha'(\varphi) = ae^{m\varphi} (m \cos \varphi - \sin \varphi, m \sin \varphi + \cos \varphi)$$

$$|\alpha'(\varphi)| = ae^{m\varphi} \sqrt{m^2 + 1}$$

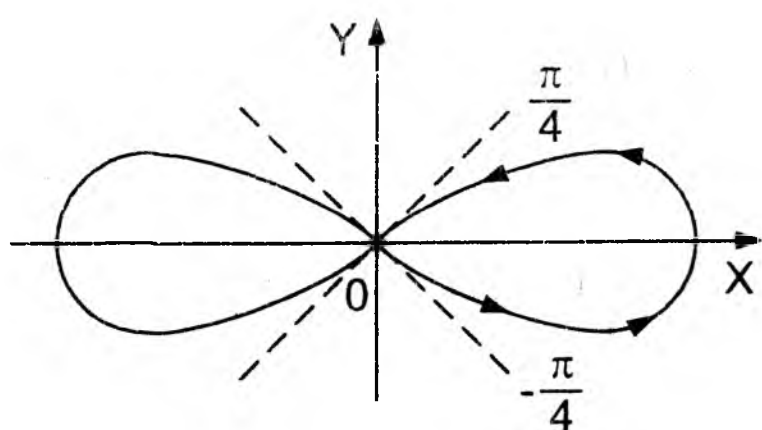
$$\int_C (x^2 + y^2)^2 dS = \int_{-\infty}^0 a^4 e^{4m\varphi} ae^{m\varphi} \sqrt{m^2 + 1} d\varphi = a^5 \sqrt{m^2 + 1} \int_{-\infty}^0 e^{5m\varphi} d\varphi$$

$$= \left(\frac{a^5 \sqrt{m^2 + 1}}{5m} \right) e^{5m\varphi} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{a^5 \sqrt{m^2 + 1}}{5m} - 0$$

$$\therefore \int_C (x^2 + y^2)^2 dS = \frac{a^5 \sqrt{m^2 + 1}}{5m}$$

2299 $\int_C (x + y) dS$, donde C es el lazo derecho de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

Desarrollo



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \\ y = a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \end{cases}$$

Sea $\alpha(\varphi) = (a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi, a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi)$

$$\alpha'(\varphi) = a\left(-\frac{\operatorname{sen} 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)$$

$$|\alpha'(\theta)| = a \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$\int_C (x+y) dS = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi + a\sqrt{\cos 2\varphi} \operatorname{sen} \varphi) \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi$$

$$= a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) d\varphi = a^2 (\operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= a^2 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = a^2 \sqrt{2}$$

2230 $\int_C (x+z) dS$, donde C es un arco de la curva $x=t$, $y=\frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z=t^3$, $0 \leq t \leq 1$

Desarrollo

Sea $\alpha(t) = (t, \frac{3t^2}{\sqrt{2}}, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\alpha'(t) = (1, 3\sqrt{2}t, 3t^2) \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{1+18t^2+9t^4}$$

$$\int_C (x+z) dS = \int_0^1 (t+t^3) \sqrt{1+18t^2+9t^4} dt = \frac{1}{54} (1+18t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{54} (28^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{1}{54} (56\sqrt{7} - 1)$$

2301 $\int_C \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$, donde C es la primera espira de la hélice circular $x = a \cos t$,
 $z = a \sin t$, $z = bt$

Desarrollo

Sea $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \arctg \frac{bt}{a} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \arctg \frac{2\pi b}{a} \end{aligned}$$

2302 $\int_C \sqrt{2y^2 + z^2} dS$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x$

Desarrollo

$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x \end{cases}$ parametrizando la curva se tiene:

$$x = \frac{a \cos t}{\sqrt{2}}, \quad z = a \sin t, \quad y = \frac{a \cos t}{\sqrt{2}}$$

Sea $\alpha(t) = \left(\frac{a \cos t}{\sqrt{2}}, \frac{a \cos t}{\sqrt{2}}, a \sin t \right)$

$$\alpha'(t) = \left(-\frac{a \sin t}{\sqrt{2}}, -\frac{a \sin t}{\sqrt{2}}, a \cos t \right) \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = a$$

$$\int_C \sqrt{2y^2 + z^2} dS = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} a dt = a^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a^2$$

- 2303** Hallar el área de la superficie lateral del cilindro parabólico $y = \frac{3}{8}x^2$, limitado por los planos $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

Desarrollo

El área de la superficie lateral del cilindro que tiene la generatriz paralela al eje OZ, cuya base es el cilindro de integración y las alturas iguales a los valores de la función subintegral, por esto $S = \int_C x dS$ donde C es el arco OA de la

parábola $y = \frac{3x^2}{8}$ que une los puntos (0,0), (4,6).

Sea $\alpha(t) = (t, \frac{3t^2}{8})$, $0 \leq t \leq 4$

$$\alpha'(t) = (1, \frac{3}{4}t) \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{1 + \frac{9t^2}{4}}$$

$$S = \int_C x dS = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9t^2}{4}} t dt = \frac{4}{27} (1 + \frac{9t^2}{4})^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{16}{27} (37\sqrt{37} - 1)$$

- 2304** Hallar la longitud del arco de hélice cónica $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$, desde el punto O(0,0,0) hasta el punto A(a,0,a).

Desarrollo

Sea $\alpha(t) = (ae^t \cos t, ae^t \sin t, ae^t)$

$$\alpha(t_1) = (ae^{t_1} \cos t_1, ae^{t_1} \sin t_1, ae^{t_1}) = (0, 0, 0) \Rightarrow t_1 \rightarrow \infty$$

$$\alpha(t_2) = (ae^{t_2} \cos t_2, ae^{t_2} \sin t_2, ae^{t_2}) = (a, 0, a) \Rightarrow t_2 = 0$$

$$\alpha'(t) = ae^t (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1) \Rightarrow |\alpha'(t)| = ae^t \sqrt{3}$$

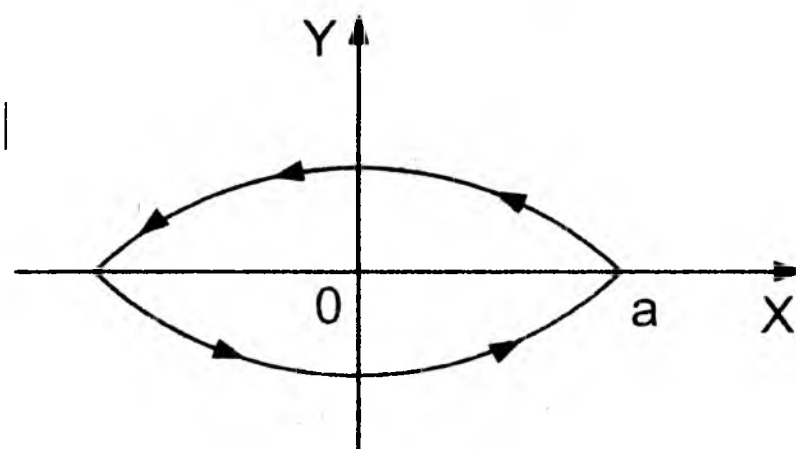
$$L = \int_C |\alpha'(t)| dt = \int_{-\infty}^0 a\sqrt{3}e^t dt = a\sqrt{3}e^t \Big|_{-\infty}^0 = a\sqrt{3} \quad \therefore L = a\sqrt{3}$$

- 2305** Determinar la masa del contorno de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si su densidad lineal en cada punto $M(x,y)$ es igual $|y|$

Desarrollo

$$M = \int_C \rho(x,y) dS \quad \text{donde } \rho(x,y) = |y|$$

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



paramétrizando la curva $x = a \cos t$, $y = b \sin t$

Sea $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$

$$\vec{\alpha}' = (-a \sin t, b \cos t) \Rightarrow |\vec{\alpha}'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

$$M = \int_C |y| dS = \int_0^{2\pi} b \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

$$= (b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsen \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a})$$

- 2306** Hallar la masa de la primera espira de la hélice circular $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, si la densidad en cada punto es igual al radio vector del mismo.

Desarrollo

$$M = \int_C \rho(x, y, z) dS \quad \text{donde} \quad \rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$M = \int_C \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS \quad \text{y} \quad C: \alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$M = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2 t^2} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + (bt)^2} dt$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \left[\frac{bt}{2} \sqrt{a^2 + b^2 t^2} + \frac{a^2}{2} \ln |bt + \sqrt{a^2 + b^2 t^2}| \right] \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2b} [2\pi b \sqrt{a^2 + 4b^2 \pi^2} + a^2 \ln |2\pi b + \sqrt{a^2 + 4b^2 \pi^2}| - a^2 \ln a]$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left[\pi \sqrt{a^2 + 4b^2 \pi^2} + \frac{a^2}{2b} \ln \left| \frac{2b\pi + \sqrt{a^2 + 4b^2 \pi^2}}{a} \right| \right]$$

- 2307** Determinar las coordenadas del centro de gravedad del semi arco de la cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Desarrollo

Sea $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ de donde

$$\alpha'(t) = (a(1 - \cos t), a \sin t) \Rightarrow |\alpha'(t)| = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} = 2a \sin \frac{t}{2}$$

$$M = \int_0^\pi |\alpha'(t)| dt = 2a \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = 4a$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi} a(t - \operatorname{sen} t) 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt}{M} = \frac{4a}{3} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\int_0^{\pi} a(1 - \cos t) 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt}{M} = \frac{4a}{3}$$

Luego las coordenadas son $(\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3})$

- 2308** Hallar el momento de inercia con respecto al eje OZ, de la primera espira de la hélice circular $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$.

Desarrollo

Sea $\alpha(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$

$$\alpha'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a \cos t, b) \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{\alpha} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

- 2309** ¿Con qué fuerza influye la masa M, distribuida con densidad constante por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, sobre la masa m, situada en el punto A(0,0,b)?

Desarrollo

Sea $U(x, y, z) = u$ función potencial de la fuerza además

$$F = \int_C x dx + y dy + z dz \quad \text{donde se tiene: } x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\text{Luego } F = \int_C x dx + y dy + z dz = \frac{kMmb}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}}$$

donde $X = x(x,y,z)$, $Y = y(x,y,z)$, $Z = z(x,y,z)$ son las proyecciones correspondientes al trabajo de campo de fuerza.

B) INTEGRALES CURVILÍNEAS DE SEGUNDO TIPO.-

Calcular las siguientes integrales curvilíneas.

- 2310 $\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, donde AB es el arco de la parábola $y = x^2$ que van desde el punto A(1,1) hasta respecto B(2,4).

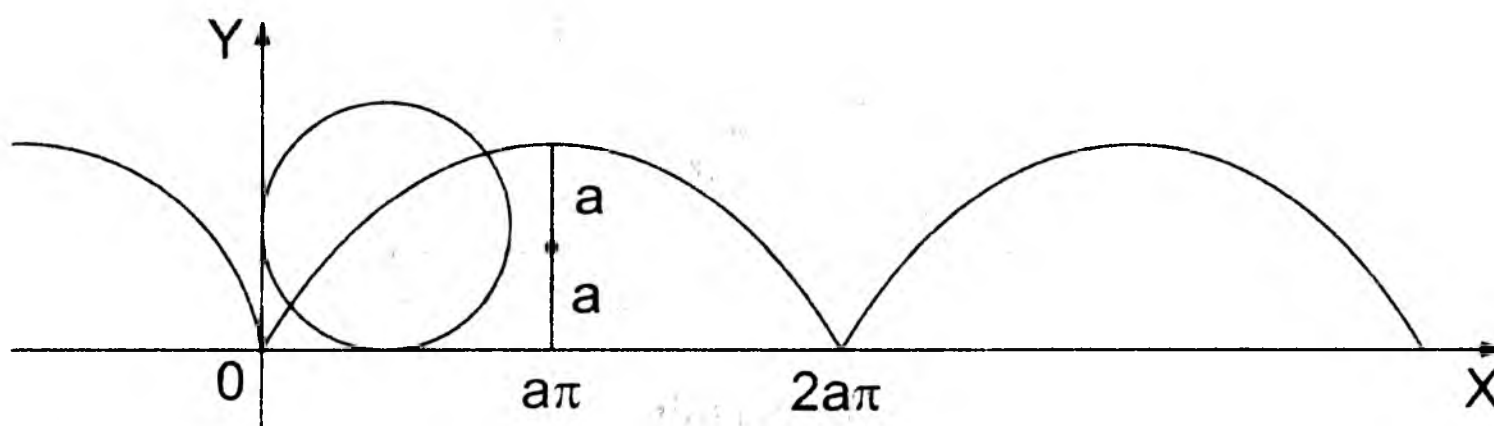
Desarrollo

Sea $\alpha(x) = (x, x^2)$, $1 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy &= \int_1^2 [(x^2 - 2x^3) + (2x^3 + x^4)2x]dx \\ &= \int_1^2 (x^2 - 2x^3 + 4x^4 + 2x^5)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 8 + \frac{128}{5} + \frac{64}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{70}{3} - 8 + \frac{124}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1219}{30} = 40\frac{19}{30} \end{aligned}$$

- 2311 $\int_C (2a - y)dx + x dy$, donde C es el primer arco de la cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ recorrido en el sentido del crecimiento del parámetro t.

Desarrollo



$$\int_C (2a - y)dx + x dy = \int_0^{2\pi} [2a - a(1 - \cos t)]a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)a \cos t dt$$

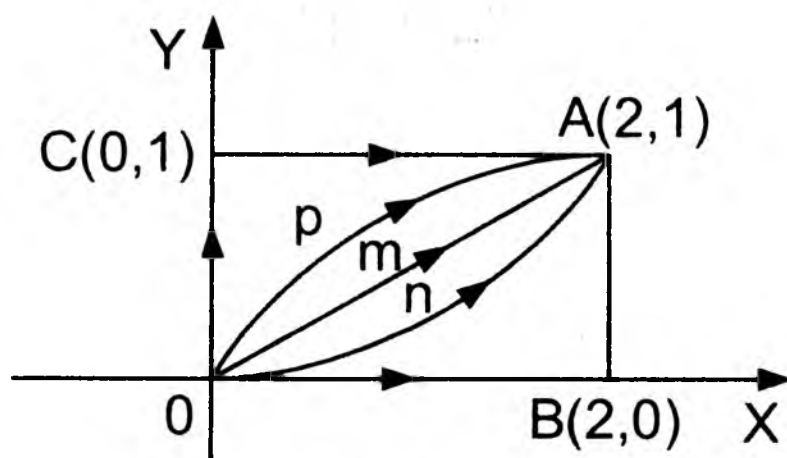
$$= \int_0^{2\pi} [(a + a \cos t)a(1 - \cos t) + a^2(t - \sin t)\cos t] dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} [(1 - \cos^2 t) + t \cos t - \sin^2 t] dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \cos t dt$$

$$= a^2 (\sin t - t \cos t) \Big|_0^{2\pi} = a^2 (0 - 2\pi - 0) = -2a^2 \pi$$

2312 $\int_{OA} 2xy dx - x^2 dy$, tomándola a lo largo de las diferentes caminos, que parten del origen del coordenadas $O(0,0)$ y que finaliza en el punto $A(2,1)$.

- Sobre la recta OmA .
- Sobre la parábola OnA , cuyo eje de simetría es el eje OY .
- Sobre la parábola OpA , cuyo eje de simetría es el eje OX .
- Sobre línea quebrada OBA .
- Sobre la línea quebrada OCA .



Desarrollo

- a) Sea $\alpha(t) = (2t, t)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{OA} 2xy \, dx - x^2 \, dy &= \int_0^1 [4t^2 \cdot 2 - 4t^2] \, dt = \int_0^1 (8t^2 - 4t^2) \, dt = \int_0^1 4t^2 \, dt \\ &= \frac{4t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- b) $\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{4})$, $0 \leq t \leq 2$

$$\int_{OA} 2xy \, dx - x^2 \, dy = \int_0^2 (\frac{t^3}{2} - t^2 \frac{t}{2}) \, dt = 0$$

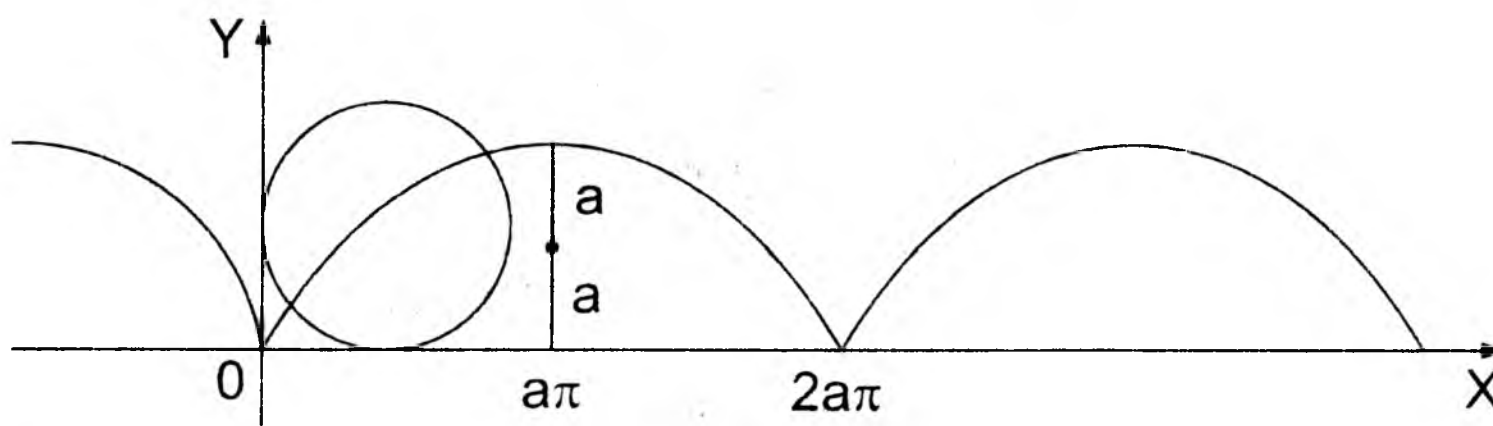
- c) $\alpha(t) = (\frac{t^2}{2}, t)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\int_{OA} 2xy \, dx - x^2 \, dy = \int_0^1 (t^3 \cdot t - \frac{t^4}{4}) \, dt = \frac{3}{4} \int_0^1 t^4 \, dt = \frac{3}{20} t^5 \Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

- 2313 $\int_{OA} 2xy \, dx + x^2 \, dy$ en las mismas condiciones del problema 2312

Desarrollo

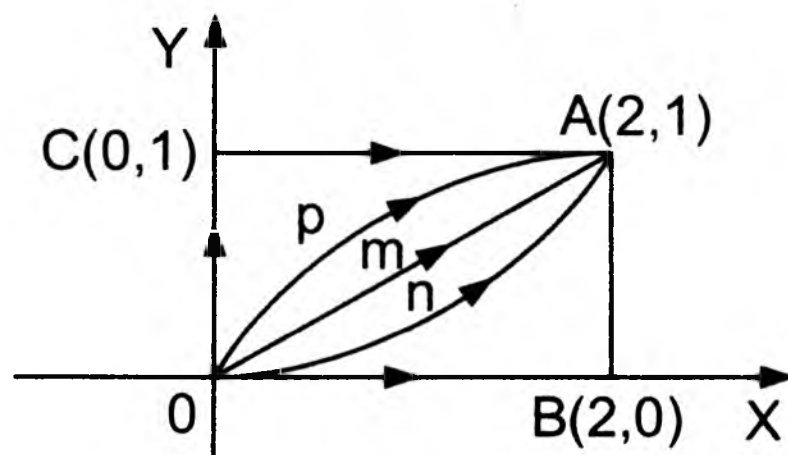
Desarrollo



$$\begin{aligned} \int_C (2a - y)dx + x dy &= \int_0^{2\pi} [2a - a(1 - \cos t)]a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)a \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(a + a \cos t)a(1 - \cos t) + a^2(t - \sin t)\cos t] dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} [(1 - \cos^2 t) + t \cos t - \sin^2 t] dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \cos t dt \\ &= a^2 (\sin t - t \cos t) \Big|_0^{2\pi} = a^2 (0 - 2\pi - 0) = -2a^2 \pi \end{aligned}$$

2312 $\int_{OA} 2xy dx - x^2 dy$, tomándola a lo largo de las diferentes caminos, que parten del origen del coordenadas $O(0,0)$ y que finaliza en el punto $A(2,1)$.

- Sobre la recta OmA .
- Sobre la parábola OnA , cuyo eje de simetría es el eje OY .
- Sobre la parábola OpA , cuyo eje de simetría es el eje OX .
- Sobre línea quebrada OBA .
- Sobre la línea quebrada OCA .



Desarrollo

a) Sea $\alpha(t) = (2t, t)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{OA} 2xy \, dx - x^2 \, dy &= \int_0^1 [4t^2 \cdot 2 - 4t^2] \, dt = \int_0^1 (8t^2 - 4t^2) \, dt = \int_0^1 4t^2 \, dt \\ &= \frac{4t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

b) $\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{4})$, $0 \leq t \leq 2$

$$\int_{OA} 2xy \, dx - x^2 \, dy = \int_0^2 (\frac{t^3}{2} - t^2 \frac{t}{2}) \, dt = 0$$

c) $\alpha(t) = (\frac{t^2}{2}, t)$, $0 \leq t \leq 1$

$$\int_{OA} 2xy \, dx - x^2 \, dy = \int_0^1 (t^3 \cdot t - \frac{t^4}{4}) \, dt = \frac{3}{4} \int_0^1 t^4 \, dt = \frac{3}{20} t^5 \Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

2313 $\int_{OA} 2xy \, dx + x^2 \, dy$ en las mismas condiciones del problema 2312

Desarrollo

b) Sea $\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{4})$, $0 \leq t \leq 2$

$$\int_{OA} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^2 (\frac{t^3}{2} + \frac{t^2 \cdot t}{2}) dt = \int_0^2 t^3 dt = 4$$

en todas las demás caso también da 4

2314 $\oint \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, tomando a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en sentido contrario de las agujas del reloj.

Desarrollo

Sea $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \oint \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{a(\sin t + \cos t)(-a \sin t) - a(\cos t - \sin t)a \cos t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2 (-\sin^2 t - \sin t \cos t + \sin t \cos t - \cos^2 t)}{a^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -t \Big|_0^{2\pi} = -2\pi \end{aligned}$$

2315 $\int_C y^2 dx + x^2 dy$, donde C es la mitad superior de la elipse $x=a \cos t$, $y=b \sin t$, que sigue en el sentido de las agujas del reloj.

Desarrollo

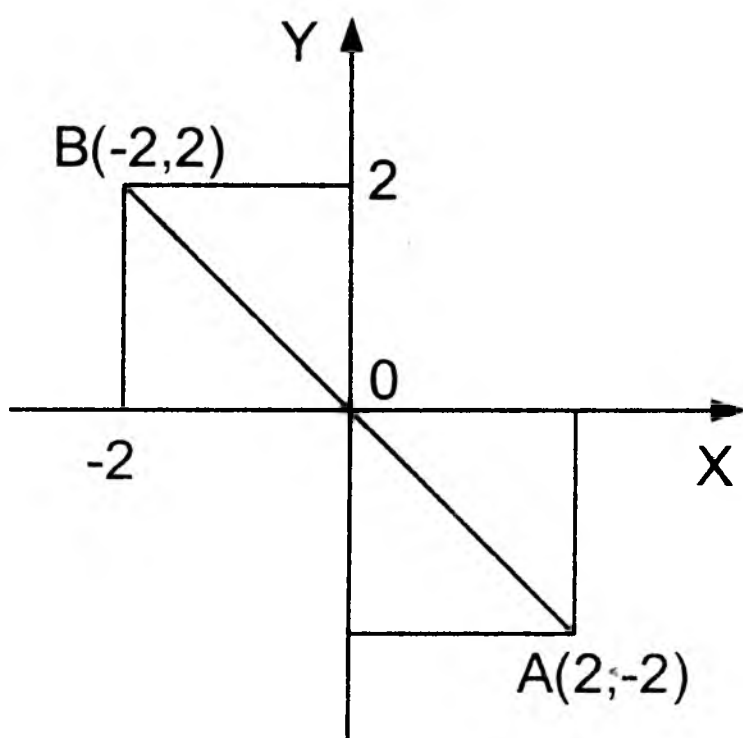
Sea $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ de donde

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_{\pi}^0 (b^2 \sin^2 t (-a \sin t) + a^2 \cos^2 t \cdot b \cos t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi}^0 (-ab^2 \operatorname{sen}^3 t + a^2 b \cos^3 t) dt \\
&= \int_{\pi}^0 [-ab^2 (1 - \cos^2 t) \operatorname{sen} t + a^2 b (1 - \operatorname{sen}^2 t) \cos t] dt \\
&= \left[-ab^2 \left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right) + a^2 b \left(\operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} \right) \right] \Bigg|_{\pi}^0 \\
&= \left[-ab^2 \left(-1 + \frac{1}{3} \right) + a^2 b (0 - 0) \right] - \left[-ab^2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] \\
&= -ab^2 \left(-\frac{2}{3} \right) - \left(-\frac{2ab^2}{3} \right) = \frac{2ab^2}{3} + \frac{2ab^2}{3} = \frac{4}{3} ab^2
\end{aligned}$$

- 2316 $\int_{AB} \cos y dx - \operatorname{sen} x dy$, tomándola a lo largo de segmento AB de la directriz del segundo ángulo coordenado, si la abscisa del punto A es igual a 2 y la ordenada del punto B igual a 2.

Desarrollo



Sea $\alpha(t) = (-t, t)$, $-2 \leq t \leq 2$

$$\begin{aligned}
&\int_{AB} \cos y dx - \operatorname{sen} x dy = \\
&= \int_{-2}^2 (-\cos t - \operatorname{sen}(-t)) dt \\
&= \int_{-2}^2 (-\cos t + \operatorname{sen} t) dt
\end{aligned}$$

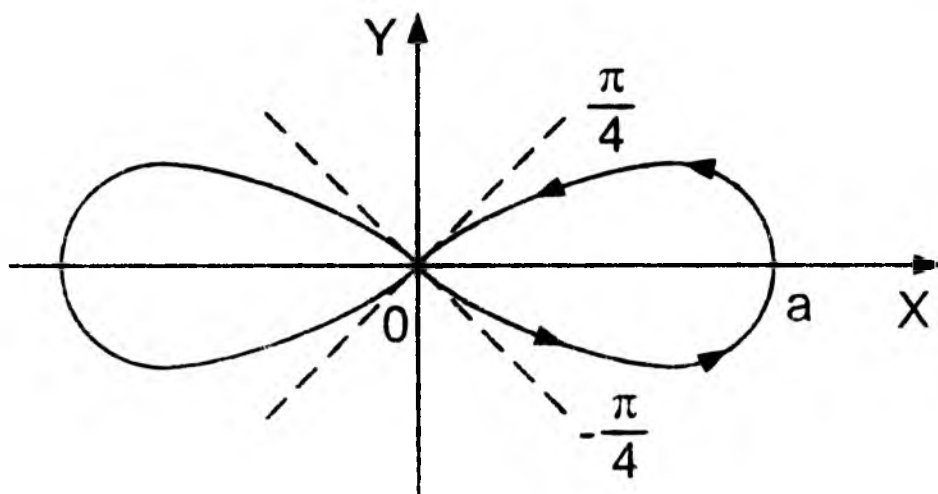
$$= (-\operatorname{sen} t - \cos t) \Big|_{-2}^2 = (-\operatorname{sen} 2 - \cos 2) - (-\operatorname{sen}(-2) - \cos(-2))$$

$$= (-\operatorname{sen} 2 - \cos 2) - (\operatorname{sen} 2 - \cos 2) = -2 \operatorname{sen} 2$$

2317 $\oint_C \frac{xy(y dx - x dy)}{x^2 + y^2}$, donde C es el lazo derecho de la lemniscata

$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, que sigue en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Desarrollo



$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi = a \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \\ y = r \operatorname{sen} \varphi = a \operatorname{sen} \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} \end{cases}$$

$$\oint_C \frac{xy(y dx - x dy)}{x^2 + y^2} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \cos 2\varphi (-a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 3\varphi - a \cos \varphi \cos 2\varphi)}{a^2 \cos 2\varphi \cos^2 \varphi + a^2 \cos 2\varphi \operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi$$

$$= a^3 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi (\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 3\varphi + \cos \varphi \cos 3\varphi)}{a^2} d\varphi$$

$$= -\frac{a}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \underbrace{\operatorname{sen} 2\varphi \cos 4\varphi}_{\text{impar}} d\varphi = 0$$

2318 Calcular las integrales curvilíneas de las expresiones diferenciales exactas siguientes.

a) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx$

Desarrollo

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} d(x, y) = xy \Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 6 - (-2) = 8$$

b) $\int_{(0,1)}^{(3,4)} x dy + y dx$

Desarrollo

$$\int_{(0,1)}^{(3,4)} x dy + y dx = \frac{x^2 + y^2}{2} \Big|_{(0,1)}^{(3,4)} = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = 12$$

c) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y)(dx + dy)$

Desarrollo

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y)(dx + dy) = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y)d(x + y) = \frac{(x + y)^2}{2} \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 2 - 0 = 2$$

d) $\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{y dx - x dy}{y^2}$ (por un camino que no corte al eje OX)

Desarrollo

$$\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{y dx - x dy}{y^2} = \int_{(1,2)}^{(2,1)} d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \Big|_{(1,2)}^{(2,1)} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

e) $\int_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^{(x,y)} \frac{dx + dy}{x + y}$ (por un camino que no corte a la recta $x + y = 0$)

Desarrollo

$$\int_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^{(x, y)} \frac{dx + dy}{x + y} = \ln(x + y)$$

f) $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$

Desarrollo

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy$$

2319 Hallar las funciones primitivas de las expresiones subintegrales y calcular las siguientes integrales.

a) $\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

Desarrollo

$$\begin{cases} P(x, y) = x^4 + 4xy^3 \\ Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 12xy^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 12xy^2 \end{aligned}$$

como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es exacta $\Rightarrow \exists f(x, y)$

tal que $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$ y $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = P(x, y) = x^4 + 4xy^3 \text{ integrando}$$

$$f(x, y) = \int (x^4 + 4xy^3) dx + g(y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2 y^3 + g(y) \quad \text{derivando}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 6x^2 y^2 + g'(y) = Q(x, y) = 6x^2 y^2 - 5y^4$$

$$g'(y) = -5y^4 \Rightarrow g(y) = -y^5$$

$$f(x, y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2 y^3 - y^5$$

$$\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2 y^2 - 5y^4) dy = \int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} df(x, y)$$

$$= f(x, y) \Big|_{(-2, -1)}^{(3, 0)} = f(3, 0) - f(-2, -1) = \left(\frac{243}{5}\right) - \left(-\frac{32}{5} - 8 + 1\right) = 62$$

$$\text{b)} \quad \int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy$$

Desarrollo

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy =$$

$$= \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y dx + x dy = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y dx + x dy$$

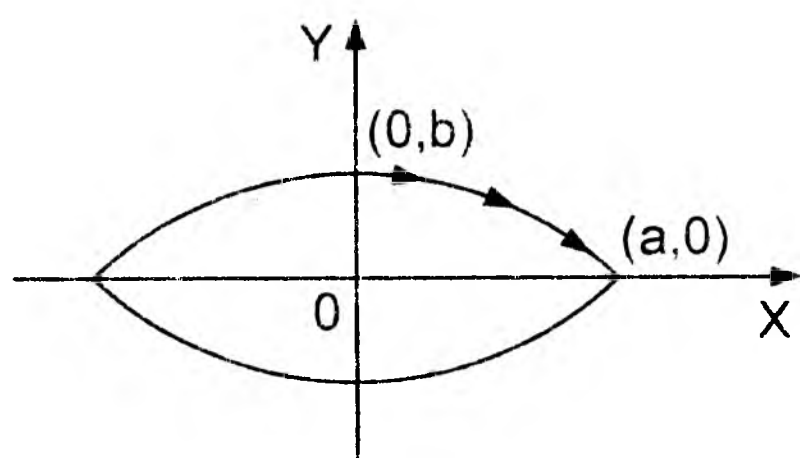
$$= d(\sqrt{x^2 + y^2}) + d(xy) = d(\sqrt{x^2 + y^2} + xy)$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(\sqrt{x^2 + y^2} + xy)$$

$$= (\sqrt{x^2 + y^2} + xy) \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \sqrt{2} + 1$$

- 2320** Calcular la integral $\int_C \frac{x dx + y dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, tomándola en el sentido de las agujas del reloj; a lo largo del cuarto de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que se encuentra en el primer cuadrante.

Desarrollo



$$\begin{aligned} \int_C \frac{x dx + y dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} &= \int_{(a,0)}^{(0,b)} d(\sqrt{1+x^2+y^2}) \\ &= \sqrt{1+x^2+y^2} \Big|_{(a,0)}^{(0,b)} \\ &= \sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2} \end{aligned}$$

- 2321** Demostrar, que si $f(u)$ es una función continua y C es un contorno cerrado “regular a trozos”, la $\oint_C f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0$

Desarrollo

$$\text{Sea } u = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx + y dy$$

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = \frac{1}{2} \int_a^b f(u) du = 0$$

$$\therefore \oint_C f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0$$

2322 Hallar la función primitiva u , sí:

a) $du = (2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy$

Desarrollo

$$\text{Sea } \begin{cases} P = 2x + 3y \\ Q = 3x - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 3 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3 \end{cases}$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es exacta $\Rightarrow \exists u$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = 2x + 3y, \text{ integrando } u = \int (2x + 3y)dx + g(y)$$

$$u = x^2 + 3xy + g(y), \text{ derivando respecto a } y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + g'(y) = Q = 3x - 4y$$

$$g'(y) = -4y \Rightarrow g(y) = -2y^2 \quad \therefore u = x^2 + 3xy - 2y^2$$

b) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$

Desarrollo

Como $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + y^2$, integrando

$$u = \int (3x^2 - 2xy + y^2)dx + g(y)$$

$$u = x^3 - x^2y + xy^2 + g(y), \text{ derivando respecto a } y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 + 2xy + g'(y) = -(x^2 - 2xy + 3y^2)$$

$$g'(y) = -3y^2 \Rightarrow g(y) = -y^3 \quad \therefore u = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$$

c)
$$du = \frac{dx}{x+y} + \frac{dy}{x+y}$$

Desarrollo

$$du = \frac{dx}{x+y} + \frac{dy}{x+y} = \frac{dx+dy}{x+y} = \frac{d(x+y)}{x+y}$$

$$u = \int \frac{d(x+y)}{x+y} = \ln |x+y| \quad \therefore u = \ln |x+y|$$

Calcular las siguientes integrales curvilíneas, tomadas a lo largo de curvas en el espacio.

2323
$$\int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$
, donde C es una espira de la hélice circular $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, correspondiente a la variación del parámetro t desde 0 hasta 2π .

Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz &= \int_0^{2\pi} [(a \sin t - bt)(-a \sin t) + \\ &\quad + (bt - a \cos t)a \cos t + (a \cos t - a \sin t)b]dt \\ &= a \int_0^{2\pi} (-a \sin^2 t + bt \sin t + bt \cos t - a \cos^2 t + b \cos t - b \sin t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a \int_0^{2\pi} [-a + b(t-1)\operatorname{sen} t + b(t+1)\cos t] dt \\
&= a[-at + b(-t\cos t + 2\operatorname{sen} t + t\operatorname{sen} t + 2\cos t)] \Big|_0^{2\pi} \\
&= a[(-2a\pi - 2b\pi + 2b) - (2b)] = -2a\pi(a + b)
\end{aligned}$$

- 2324 $\oint y dx + z dy + x dz$, donde C es la circunferencia $x = R \cos \alpha \cos t$, $y = R \cos \alpha \operatorname{sen} t$, $z = R \operatorname{sen} \alpha$ ($\alpha = \text{constante}$) recorriendo en el sentido del crecimiento del parámetro.

Desarrollo

$$\begin{aligned}
\oint y dx + z dy + x dz &= \int_0^{2\pi} [R \cos \alpha \operatorname{sen} t (-R \cos \alpha \operatorname{sen} t) + \\
&\quad + R \operatorname{sen} \alpha R \cos \alpha \cos t + R \cos \alpha \cos t \cdot 0] dt \\
&= \int_0^{2\pi} [-R^2 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 t + R^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos t] dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^2 \alpha (1 - \cos 2t)}{2} + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos t \right] dt \\
&= R^2 \left[-\frac{\cos^2 \alpha}{2} t + \frac{\cos^2 \alpha \operatorname{sen} 2t}{4} + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} t \right] \Big|_0^{2\pi} = -R^2 \cos^2 \alpha \cdot \pi
\end{aligned}$$

- 2325 $\int_{OA} xy dx + yz dy + zx dz$, donde OA es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z = x$, situado por el lado del plano XOZ , donde $y > 0$.

Desarrollo

$$z = x \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 2Rx, \text{ parametrizando}$$

$$x^2 - Rx + \frac{y^2}{2} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{R^2}{4}$$

$$\text{donde } x = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t, \quad y = \frac{\sqrt{2}R}{2} \sin t$$

$$\text{será } \alpha(t) = \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} R \sin t, \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t\right), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{OA} xy \, dx + yz \, dy + zx \, dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t\right) \frac{\sqrt{2}}{2} R \sin t \left(-\frac{R}{2} \sin t\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2}}{2} R \sin t \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t\right) \frac{\sqrt{2}}{2} R \cos t + \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos t\right)^2 \left(-\frac{R}{2} \sin t\right) \right] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{\sqrt{2}}{8} R^3 (1 + \cos t) \sin^2 t + \frac{R^3}{4} (1 + \cos t) \sin t \cos t - \frac{R^3}{8} (1 + \cos t)^2 \sin t \right] dt \\ &= \left(\frac{7 - \sqrt{2}}{24} - \frac{\pi}{32} \sqrt{2} \right) R^3 \end{aligned}$$

2326 Calcular las integrales curvilíneas de las diferenciales exactas siguientes:

a) $\int_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} x \, dx + y \, dy - z \, dz$

Desarrollo

$$\int_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} x \, dx + y \, dy - z \, dz = \int_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} d\left(\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}\right)$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2} \Big/_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} = \frac{1}{2}[(36 + 16 - 64) - (1 + 0 - 9)] = -2$$

b) $\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz$

Desarrollo

$$\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz = \int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} d(xyz) = xyz \Big/_{(1,1,1)}^{(a,b,c)}$$

c) $\int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{x \, dx + y \, dy + z \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{x \, dx + y \, dy + z \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} d(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Big/_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

d) $\int_{(1,1,1)}^{(x,y,\frac{1}{xy})} \frac{yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz}{xyz}$

Desarrollo

$$\begin{aligned} \int_{(1,1,1)}^{(x,y,\frac{1}{xy})} \frac{yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz}{xyz} &= \int_{(1,1,1)}^{(x,y,\frac{1}{xy})} d(\ln xyz) \\ &= \ln(xyz) \Big/_{(1,1,1)}^{(x,y,\frac{1}{xy})} = \ln 1 - \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

C) FÓRMULA DE GREEN.-

2327 Valiéndose de la fórmula de Green, transformar la integral curvilínea

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy, \text{ donde el contorno } C \text{ limita}$$

un recinto S.

Desarrollo

$$\begin{cases} P = \sqrt{x^2 + y^2} \\ Q = y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_S \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy = \iint_S y^2 dx dy$$

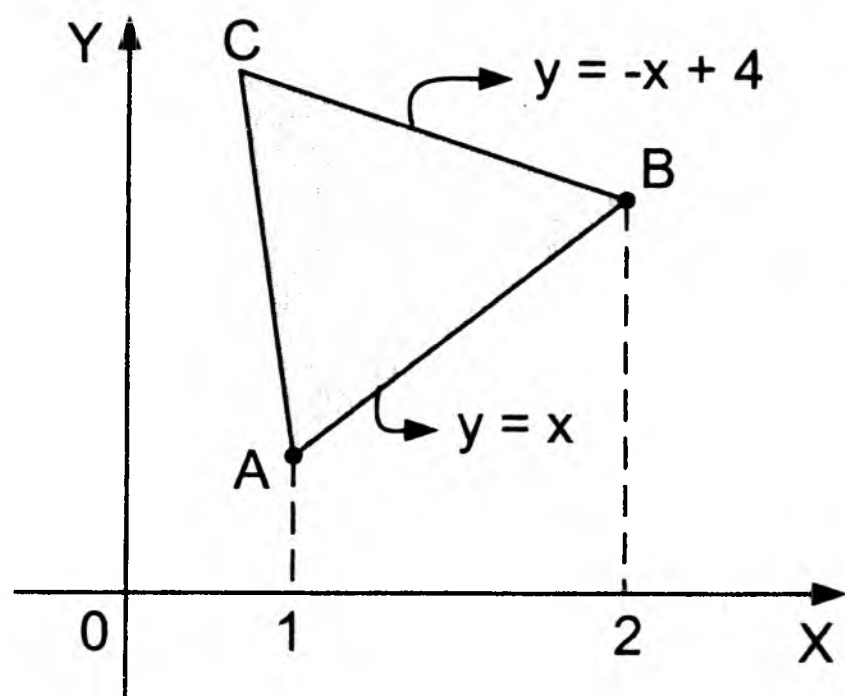
2328 Aplicando el teorema de Green, calcular $I = \oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$,

donde C es el contorno de un triángulo, cuyos vértices están en los puntos A(1,1), B(2,2) y C(1,3) y que recorre en sentido positivo. Comprobar el resultado obtenido, calculando la integral directamente.

Desarrollo

$$\begin{cases} P = 2(x^2 + y^2) \\ Q = (x + y)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 4y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y) \end{cases}$$

$$I = \oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



$$= \iint_S 2(x - y) dx dy$$

$$= \int_1^2 \left(\int_x^{4-x} 2(x - y) dy \right) dx$$

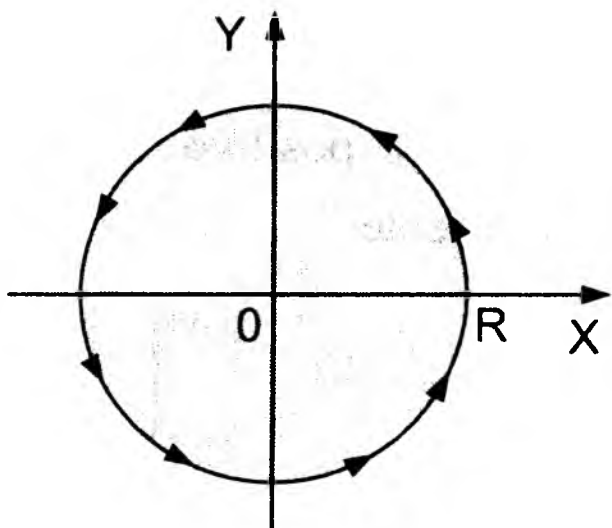
$$= \int_1^2 (2xy - y^2) \Big|_x^{4-x} dx$$

$$= 4 \int_1^2 (4x - x^2 - 4) dx = 4 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_1^2 = 4 \left(-\frac{70}{3} + 2 \right) = -\frac{40}{3}$$

2329 Aplicando la fórmula de Green, calcular la integral $\oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy$,

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, que se recorre en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Desarrollo



$$\begin{cases} P = -x^2 y \\ Q = xy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 \end{cases}$$

aplicando la fórmula de Green

$$\oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

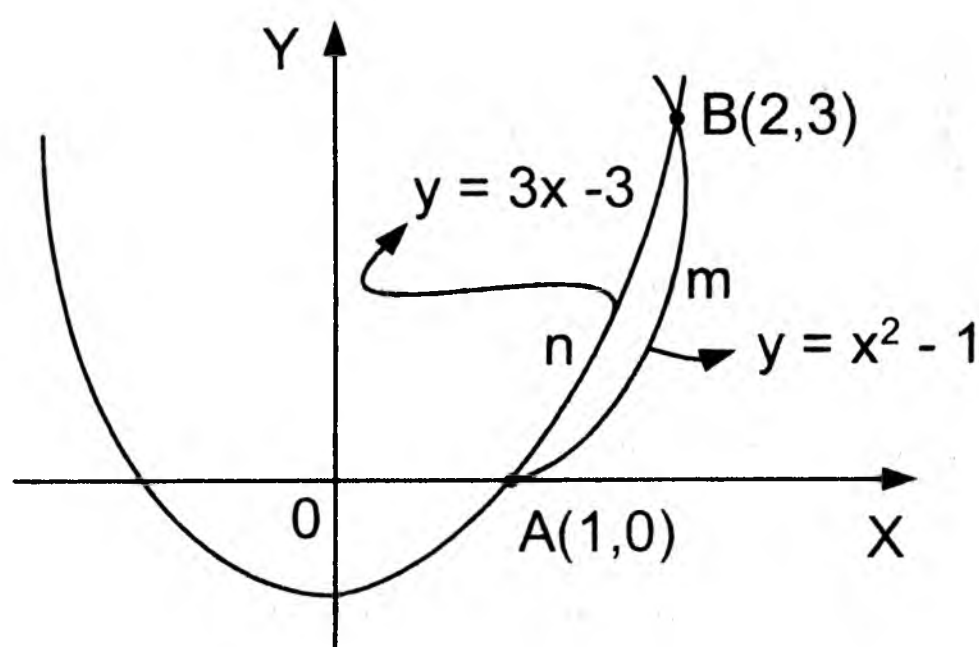
$$= \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 r dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R d\theta = \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{R^4 \pi}{2}$$

2330 Por los puntos A(1,0) y B(2,3) se ha trazado una parábola AmB, cuyo eje coincide con el eje OY, y su cuerda es AnB. Hallar la integral

$\oint_{AmBnA} (x+y)dx - (x-y)dy$ directamente, aplicando la fórmula de Green.

Desarrollo



$$y - k = 4px^2$$

para A(1,0) se tiene: $-k = 4p$

para B(2,3) se tiene: $3 - k = 16p$

entonces $p = \frac{1}{4}, k = 1$

Luego $y = x^2 - 1$

$$\begin{cases} P = x + y \\ Q = -(x - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \end{cases}$$

$$\oint_{AmBnA} (x+y)dx - (x-y)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S -2 dx dy$$

$$= -2 \int_1^2 \left(\int_{x^2-1}^{3x-3} dy \right) dx = -2 \int_1^2 (3x - 3 - x^2 + 1) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -2\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right) \Big/_1^2 = -3\left[\left(-\frac{8}{3} + 6 - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right)\right] \\
 &= -2\left[-\frac{7}{3} - \frac{3}{2} + 4\right] = -2\left[-\frac{23}{6} + 4\right] = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

- 2331** Hallar la integral $\int_{AmB} e^{xy} (y^2 dx + (1 + xy) dy)$ si los puntos A y B están situados en el eje OX y el área limitada por el camino de integración AmB y por el segmento AB, es igual a S.

Desarrollo

Por diferencial exacta se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{AmB} e^{xy} [y^2 dx + (1 + xy)] dy &= \int_{(a,0)}^{(b,0)} d(ye^{xy}) = ye^{xy} \Big/_{(a,0)}^{(b,0)} \\
 &= e^{b(0)}(0) - e^{a(0)}(0) = 0 - 0 = 0
 \end{aligned}$$

- 2332** Calcular la $\oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ examinar dos casos:

- Cuando el origen de coordenadas esta fuera del contorno C.
- Cuando el contorno rodea n veces el origen de coordenadas.

Desarrollo

$$\oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \oint_C -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

$$\begin{cases} P = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ Q = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

$$\oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R 0 dx dy = 0$$

$$\therefore \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$$

- 2333** Demostrar que si C es una curva cerrada, entonces: $\oint_C \cos(x, n) dS = 0$ donde S es la longitud del arco y n la normal exterior.

Desarrollo

Si se supone que la dirección de la tangente coincide con la dirección del recorrido positivo del contorno, tendremos que $\cos(x, n) = \cos(y, t) = \frac{dy}{dS}$, por consiguiente:

$$\oint_C \cos(x, n) dS = \oint_C \frac{dy}{dS} dS = \oint_C dy = 0 \quad \therefore \oint_C \cos(x, n) dS = 0$$

- 2334** Valiéndose de la fórmula de Green, hallar la integral

$I = \oint_C [x \cos(x, n) + y \operatorname{sen}(x, n)] dS$ donde dS es la diferencial del arco y n, la normal exterior del contorno C.

Desarrollo

$$\cos(x, n) = \cos(y, t) = \frac{dy}{dS}$$

$$\operatorname{sen}(x, b) = \operatorname{sen}(y, t) = -\frac{dx}{dS}$$

$$\oint_C [x \cos(x, n) + y \operatorname{sen}(x, n)] dS = \oint_C \left(x \frac{dy}{dS} - y \frac{dx}{dS} \right) dS = \oint_C x dy - y dx$$

$$\oint_C [x \cos(x, n) + y \operatorname{sen}(x, n)] dS = \oint_C x dy - y dx$$

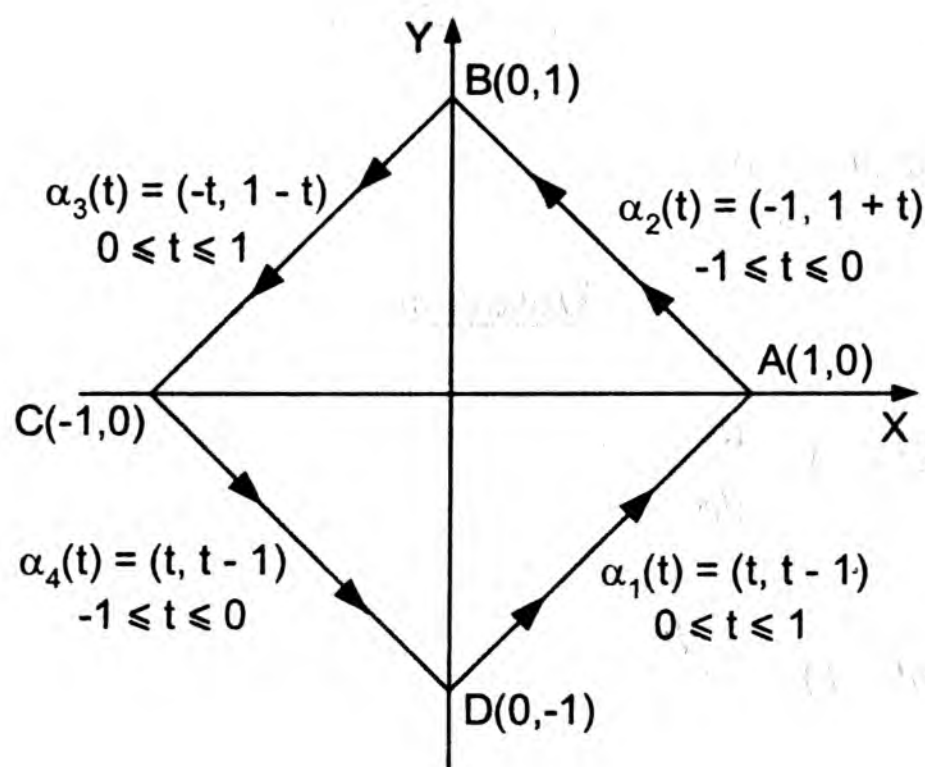
$$\begin{cases} P = -y \\ Q = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

$$I = \oint_C [x \cos(x, n) + y \operatorname{sen}(x, n)] dS = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R 2 dx dy = 2S$$

$$\therefore \oint_C [x \cos(x, n) + y \operatorname{sen}(x, n)] dS = 2S$$

- 2335** Calcular la integral $\oint_C \frac{dx - dy}{x + y}$ tomada a lo largo del contorno del cuadrado que tiene sus vértices en los puntos A(1,0), B(0,1), C(-1,0) y D(0,-1), con la condición de que el recorrido del contorno se haga en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Desarrollo



$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dx - dy}{x + y} &= \int_0^1 \frac{dt - dt}{2t - 1} + \int_{-1}^0 \frac{-dt - dt}{1} + \int_0^1 \frac{-dt - (-dt)}{-2t + 1} + \int_{-1}^0 \frac{dt + dt}{-1} \\ &= 0 - \int_{-1}^0 2 dt + 0 - \int_{-1}^0 2 dt = -4 \int_{-1}^0 dt = -4t \Big|_{-1}^0 = -4(0 + 1) = -4\end{aligned}$$

$$\therefore \oint_C \frac{dx - dy}{x + y} = -4$$

D) APLICACIONES DE LA INTEGRAL CURVILÍNEA.

Calcular el área de las figuras limitadas por las siguientes curvas.

2336 Por la elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$

Desarrollo

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t b \cos t + b \sin t a \sin t) dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2} t \Big|_0^{2\pi} = ab\pi\end{aligned}$$

2337 Por el astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$

Desarrollo

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = 4 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t - (a \sin^3 t)(-3a \cos^2 t \sin t)) dt \right] \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{6a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt = \frac{6a^2}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) \, dt \\
 &= \frac{3a^2}{4} \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2 \pi}{8}
 \end{aligned}$$

2338 Por la Cardioide $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx = 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi (a^2 (2 \cos t - \cos 2t)(2 \cos t - 2 \cos 2t) - \right. \\
 &\quad \left. - a^2 (2 \sin t - \sin 2t)(-2 \sin t + 2 \sin 2t)) \, dt \right] \\
 &= \int_0^\pi a^2 [(2 \cos t - \cos 2t)(2 \cos t - 2 \cos 2t) + (2 \sin t - \sin 2t)(2 \sin t - 2 \sin 2t)] \, dt \\
 &= 2a^2 \int_0^\pi [(2 \cos t - \cos 2t)(\cos t - \cos 2t) + (2 \sin t - \sin 2t)(\sin t - \sin 2t)] \, dt \\
 &= 2a^2 \int_0^\pi (2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t - 3 \cos t \cos 2t - 3 \sin t \sin 2t + \cos^2 2t + \sin^2 2t) \, dt \\
 &= 2a^2 \int_0^\pi (3 - 3 \cos 3t) \, dt = 2a^2 (3t - \sin 3t) \bigg|_0^\pi = 6a^2 \pi
 \end{aligned}$$

2339 Por el lazo de Folium de Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$

Desarrollo

$$\text{Sea } y = tx \Rightarrow x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx, \text{ donde la curva es:}$$

$$\vec{\alpha}(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right), \quad 0 \leq t < \infty$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{3at}{1+t^3} d\left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right) - \frac{3at^2}{1+t^3} d\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)$$

$$A = 9a^2 \int_0^\infty \frac{y^2}{(1+t^3)^2} dt = 9a^2 \left[-\frac{1}{3(1+t^3)} \right]_0^\infty$$

$$A = 3a^2(0+1) = 3a^2u^2$$

$$\therefore A = 3a^2u^2$$

2340 Por la curva $(x+y)^3 = axy$

Desarrollo

$$\text{Sea } y = xt \Rightarrow (x+xt)^3 = ax^2t \text{ de donde } x = \frac{at}{(1+t)^3}, \quad y = \frac{at^2}{(1+t)^3}$$

$$\text{Sea } \vec{\alpha}(t) = \left(\frac{at}{(1+t)^3}, \frac{at^2}{(1+t)^3} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{at}{(1+t)^3} d\left(\frac{at^2}{(1+t)^3}\right) - \frac{at^2}{(1+t)^3} d\left(\frac{at}{(1+t)^3}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^4 - 2t^3 - 2t^2 - t}{(1+t)^7} dt = \frac{a}{60}$$

$$\therefore A = \frac{a}{60}$$

- 2341** Una circunferencia de radio r rueda sin resbalar sobre otra circunferencia fija, de radio R , conservándose siempre fuera de ella, suponiendo que $\frac{R}{r}$ sea un número entero, hallar el área limitada por la curva (epicicloide) que describe cualquiera de los puntos de la circunferencia móvil. Analizar el caso particular en que $r = R$ (cardioide)

Desarrollo

La ecuación de la epicicloide tiene la forma:

$$x = (R + r) \cos t - r \cos \frac{R + r}{r} t \quad ; \quad y = (R + r) \sin t - r \sin \frac{R + r}{r} t$$

donde t es el ángulo de giro del radio del círculo fijo, trazado en el punto de contacto.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x dy - y dx$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\left[(R + r) \cos t - r \cos \frac{R + r}{r} t \right] \left[(R + r) \cos t - (R + r) \cos \frac{R + r}{r} t \right] - \right. \\ \left. - \left[(R + r) \sin t - r \sin \frac{R + r}{r} t \right] \left[-(R + r) \sin t + (R + r) \sin \frac{R + r}{r} t \right] \right] dt$$

$$A = \frac{R + r}{2} \int_0^{2\pi} \left[(R + r)(\sin^2 t + \cos^2 t) - [(R + 2r) \cos t \cos \frac{R + r}{r} t - \right. \\ \left. - (R + 2r)(\sin t + \sin \frac{R + r}{r} t) + r \cos^2 \frac{R + r}{r} t + r \sin^2 \frac{R + r}{r} t \right] dt$$

$$A = \frac{R + r}{2} \int_0^{2\pi} \left[(R + 2r) - (R + r) \cos \frac{R}{r} t \right] dt = \frac{R + r}{2} (R + 2r) \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos \frac{R}{r} t \right) dt$$

$$A = \frac{R+r}{2} (R+2r) \left[t - \frac{r}{R} \operatorname{sen} \frac{R}{r} t \right] \Big/_0^{2\pi} \quad \therefore A = (R+r)(R+2r)\pi$$

- 2342** Una circunferencia de radio r rueda sin resbalar por otra circunferencia fija, de radio R , permaneciendo siempre dentro de ella, suponiendo que $\frac{R}{r}$ sea un número entero, hallar el área limitada por la curva hipocicloide descrita por cualquiera de los puntos de la circunferencia móvil, analizar el caso particular en que $r = \frac{R}{4}$ (astroide).

Desarrollo

La ecuación de la hipocicloide se obtiene de la ecuación de la epicicloide correspondiente (ver problema 2341) sustituyendo r por $-r$ es decir:

$$x = (R-r) \cos t + r \cos \frac{R-r}{r} t \quad ; \quad y = (R-r) \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} \frac{R-r}{r} t$$

donde t es el ángulo de giro del radio del círculo fijo, trazado en el punto de contacto.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x dy - y dx$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\left[(R-r) \cos t + r \cos \frac{R-r}{r} t \right] \left[(R-r) \cos t - (R-r) \cos \frac{R-r}{r} t \right] - \right. \\ \left. - \left[(R-r) \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} \frac{R-r}{r} t \right] \left[-(R-r) \operatorname{sen} t - (R-r) \operatorname{sen} \frac{R-r}{r} t \right] \right] dt$$

$$A = \frac{R-r}{2} \int_0^{2\pi} \left[(R-2r) - (R-2r) \cos \frac{R}{r} t \right] dt$$

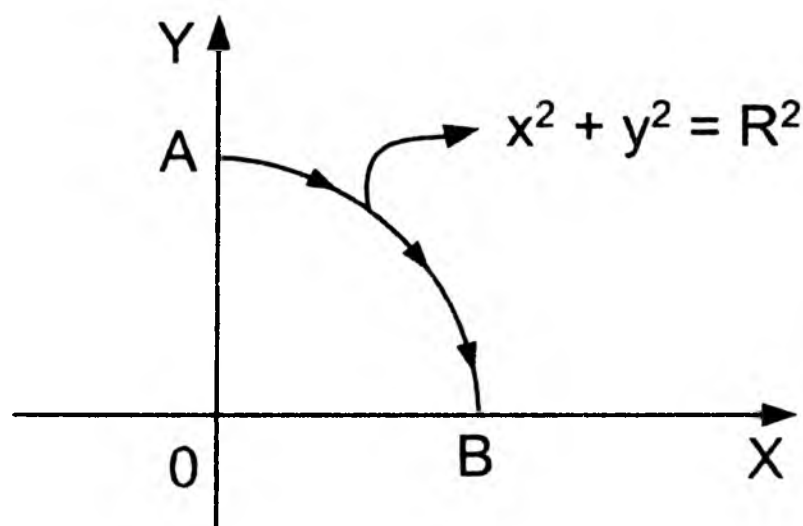
$$A = \frac{R-r}{2} (R-2r) \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos \frac{R}{r} t\right) dt = \frac{R-r}{2} (R-2r) \left(t - \frac{r}{R} \operatorname{sen} \frac{R}{r} t\right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$\therefore A = \frac{R-r}{2} (R-2r) (2\pi - 0) \text{ de donde } A = (R-r)(R-2r)\pi$$

Para el caso en que $r = \frac{R}{4}$ se tiene $A = \frac{3R^2}{8} \pi$

- 2343** Un campo está engendrado por una fuerza de magnitud constante F , que tiene la dirección del semi eje positivo OX . Hallar el trabajo de dicho campo, cuando un punto material describe, en el sentido de las agujas del reloj, el cuarto del círculo $x^2 + y^2 = R^2$ que se encuentra en el primer cuadrante.

Desarrollo



$$\vec{F} = f \cdot \vec{i} \Rightarrow F = |\vec{F}|, \text{ por definición se tiene:}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{i} \text{ de donde } d\vec{i} = dx \vec{i} + dy \vec{j} \Rightarrow \vec{F} = F \vec{i}$$

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F dx = F \int_0^R dx = F \cdot R \quad \therefore W_{AB} = F \cdot R$$

- 2344** Hallar el trabajo que realiza la fuerza de gravedad al trasladar un punto material de masa m , desde la posición $A(x_1, y_1, z_1)$ hasta la posición $B(x_2, y_2, z_2)$ (el eje OZ está dirigido verticalmente hacia arriba).

Desarrollo

Fuerza de gravedad: $x = 0, y = 0, z = -mg$

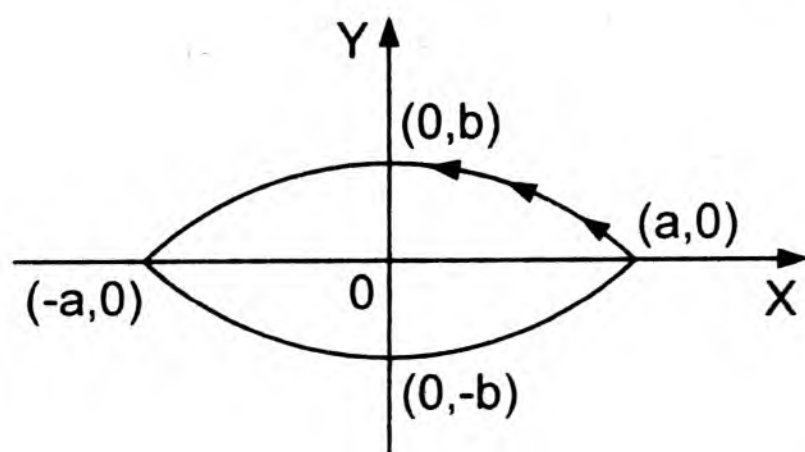
$$z_1 \leq z \leq z_2, \quad z \geq 0$$

como $x = y = 0 \Rightarrow dx = dy = 0$

$$w = \int_{z_1}^{z_2} -mg \, dz = -mgz \Big|_{z_1}^{z_2} = -mg(z_2 - z_1) \quad \therefore w = -mg(z_2 - z_1)$$

- 2345** Hallar el trabajo de una fuerza elástica, dirigida hasta el origen de coordenadas, cuya magnitud es proporcional al alejamiento del punto respecto al origen de coordenadas, si el punto de aplicación de dicha fuerza describe, en sentido contrario al de las agujas del reloj, el cuanto de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situado en el primer cuadrante.

Desarrollo



Fuerza elástica $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i} - ky\mathbf{j}$

$$w = \int_{(a,0)}^{(0,b)} -kx \, dx - ky \, dy$$

$$w = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2) \Big|_{(a,0)}^{(0,b)} = -\frac{k}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\therefore w = -\frac{k}{2}(b^2 - a^2)$$

2346 Hallar la función potencial de la fuerza $R(x,y,z)$ y determinar el trabajo de dicha fuerza en el trozo de camino que se da, sí:

a) $x = 0, y = 0, z = -mg$ (fuerza de gravedad) y el punto material se desplaza desde la posición $A(x_1, y_1, z_1)$ a la posición $B(x_2, y_2, z_2)$.

b) $x = -\frac{ux}{r^3}, y = -\frac{uy}{r^3}, z = -\frac{\pi z}{r^3}$, donde $u = \text{constante}$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (fuerza de atracción de Newton) y el punto material se desplaza desde la posición $A(a,b,c)$ hasta el infinito.

c) $X = -k^2x, Y = -k^2y, Z = -k^2z$, donde $k = \text{constante}$ (fuerza elástica), estando el punto inicial del camino en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el final de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ($R > r$)

Desarrollo

a) Fuerza potencial = diferencial exacta $x = y = 0, dx = dy = dz, z = -mg$

$$w = \int_{z_1}^{z_2} -mg \, dz = -mg(z_1 - z_2)$$

$$b) \quad w = \int_C x \, dx + y \, dy + z \, dz = \int_C \frac{-ux \, dx - uy \, dy - u \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$c) \quad X = -k^2x, Y = -k^2y, Z = -k^2z$$

$$w = -k^2 \int x \, dx + y \, dy + z \, dz \quad \text{es exacto}$$

$$\therefore w = -k^2(f(R^2) - f(r^2))$$

7.10. INTEGRALES DE SUPERFICIE.-

1er. INTEGRALES DE SUPERFICIE DE PRIMER TIPO.-

Sea $f(x,y,z)$ una función continua y $z = \varphi(x,y)$ una superficie regular S .

La integral de superficie de primer tipo representa de por sí el límite de la suma integral.

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

donde ΔS_i es el área de un elemento i de la superficie S , al que pertenece el punto (x_i, y_i, z_i) ; el diámetro máximo de estos elementos en que se divide la superficie tiende a cero.

El valor de esta integral no depende del lado de la superficie S que se elija para la integración si la proyección C de la superficie S sobre el plano XOY es uniforme, es decir que cualquier recta paralela al eje OZ corta a la superficie S en un sólo punto, la correspondiente integral de superficie de primer tipo se puede calcular por la fórmula:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_C f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)} dx dy$$

2do. INTEGRAL DE SUPERFICIE DE SEGUNDO TIPO.-

Si $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ y $R = R(x,y,z)$ son funciones continuas y S^+ es la cara de una superficie regular S que se caracteriza por la dirección de la normal $n(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ la correspondiente integral de superficie de segundo tipo se expresan de la forma siguiente:

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{S^+} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

Al pasar a la otra cara S^- de la superficie, esta integral cambia su signo por el contrario.

Si la superficie S está dado de forma implícita $F(x,y,z) = 0$, los cosenos directores de la normal a esta superficie se determinan por las fórmulas

$$\cos \alpha = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos \beta = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$$

donde $D = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$ y el signo que ponga delante del radical debe elegirse de acuerdo con la cara de la superficie S que se tome.

3er. FÓRMULA DE STOCKES.-

Si las funciones $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ y $R = R(x,y,z)$ tienen derivadas continuas y C es un contorno cerrado, que limita una superficie bilateral S , se verifica la fórmula de STOCKES:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

donde $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$, son los cósenos directores de la normal a la superficie S , debiendo determinarse la dirección de la normal de tal forma que, desde esta, el recorrido del contorno C se efectúa en sentido contrario al que siguen las agujas del reloj (en un sistema de coordenadas de mano derecha).

Calcular las siguientes integrales de superficie de primer tipo.

2347 $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Desarrollo

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

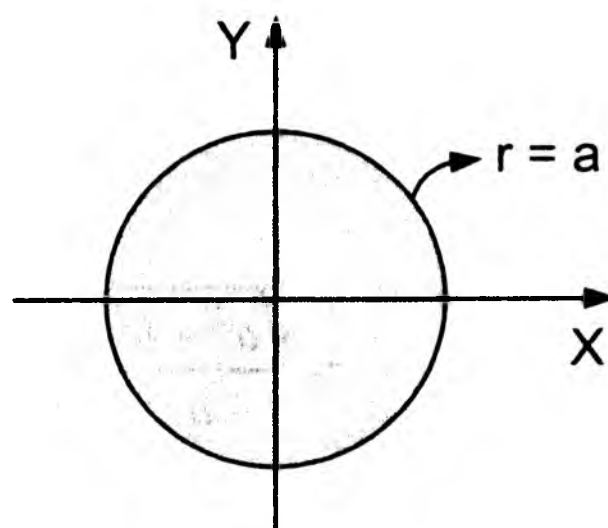
$$\iint_S (x^2 + y^2) dS = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$= a \iint_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$= a \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \right) d\theta$$

$$= \frac{2a^4}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4a^4\pi}{3}$$



2348 $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$, donde S es la superficie lateral del cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$,

$(0 \leq z \leq b)$

Desarrollo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \Rightarrow z = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{by}{a\sqrt{x^2 + y^2}}$$

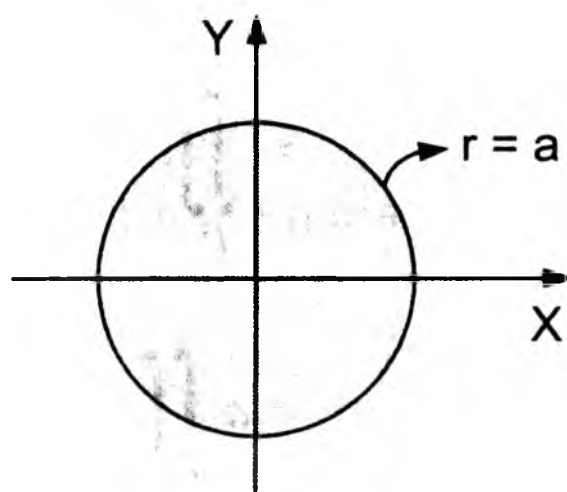
$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(x^2 + y^2)} + \frac{b^2 y^2}{a^2(x^2 + y^2)}} dx dy$$

$$= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r^2 dr \right) d\theta = \frac{2a^2 \pi \sqrt{a^2 + b^2}}{3}$$



Calcular las siguientes integrales de superficies de segundo tipo.

- 2349 $\iint_S yz dy dz + xz dx dz + xy dx dy$, donde S es la cara exterior de la superficie del tetraedro limitado por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a$.

Desarrollo

Según el teorema de Gauss.

$$\iiint_k \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

como $\begin{cases} P = yz \\ Q = xz \\ R = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \end{cases}$ luego se tiene:

$$\begin{aligned} \iint_S yz dy dz + xz dz dx + xy dx dy &= \iiint_k \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_k (0 + 0 + 0) dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

2350 $\iint_S z dx dy$, donde S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Desarrollo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

el eje mayor es: $a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$; el eje menor es: $b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$

Área de la elipse es: $A = \pi(\text{base mayor})(\text{base menor})$

$$A = \pi ab \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$$

$$\iint_S z \, dx \, dy = 2\pi \int_0^c ab(1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = 2\pi ab(z - \frac{z^3}{3c^2}) \Big|_0^c = 2\pi ab(c - \frac{c^3}{3c^2})$$

$$\therefore \iint_S z \, dx \, dy = \frac{4\pi abc}{3}$$

- 2351 $\iint_S x^2 dy \, dz + y^2 dz \, dx + z^2 dx \, dy$, donde S es la cara exterior de la superficie de la semi esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ($z \geq 0$).

Desarrollo

Según el teorema de Gauss.

$$\begin{cases} P = x^2 \\ Q = y^2 \\ R = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial R}{\partial z} = 2z \end{cases}$$

$$\iint_S x^2 dy \, dx + y^2 dz \, dx + z^2 dx \, dy = \iiint_k (2x + 2y + 2z) dx \, dy \, dz$$

$$2 \iiint_k x \, dx \, dy \, dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r(r \cos \theta) dz \right) dr \right) d\theta = a^4 \arcsen 1 = \frac{a^4 \pi}{2}$$

$$2 \iiint_k y \, dx \, dy \, dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r \cdot r \sin \theta \, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= \frac{a^4 \pi}{2} (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^4 \pi}{2}$$

$$2 \iiint_k z \, dx \, dy \, dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r \cdot z \, dz \right) dr \right) d\theta = \frac{a^4 \pi}{2}$$

por lo tanto se tiene:

$$\iint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy = \frac{a^4 \pi}{2} - \frac{a^4 \pi}{2} + \frac{a^4 \pi}{2} = \frac{a^4 \pi}{2}$$

- 352** Hallar la masa de la superficie del cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, si la densidad superficial en el punto $M(x,y,z)$ es igual a xyz .

Desarrollo

Sobre el plano XY, $0 \leq z \leq 1$

$$z = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 1$$

$$M_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy(1) \, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 x \, dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Sobre el plano XZ, $0 \leq y \leq 1$

$$y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = 1$$

$$M_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 x(1)z \, dz \right) dx = \int_0^1 \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Sobre el plano YZ, $0 \leq x \leq 1$

$$x = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = 1$$

$$M_3 = \int_0^1 \left(\int_0^1 (1)yz \, dz \right) dy = \int_0^1 \frac{z^2}{2} \Big|_0^1 y \, dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{y^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{por lo tanto Masa} = M = M_1 + M_2 + M_3 = \frac{3}{4}$$

- 2353** Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la cápsula parabólica homogénea $az = x^2 + y^2$, $(0 \leq z \leq a)$

Desarrollo

$$\rho(x, y, z) = 1, \quad 0 \leq z \leq a$$

$$z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{a}$$

$$z = a \Rightarrow az = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

$$M = \int_0^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \rho(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2}} dy \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4(x^2 + y^2)} dy \right) dx$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow dx \, dy = r \, dr \, d\theta$$

$$M = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r \sqrt{a^2 + 4r^2} dr \right) d\theta = \frac{a^2 \pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

$$M_{xy} = \iint_R z \rho(x, y, z) d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \frac{r}{a} \cdot \frac{r^2}{a} \sqrt{a^2 + 4r^2} dr \right) d\theta = \frac{a^3 \pi}{60} (25\sqrt{5} + 1)$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{a(25\sqrt{5} + 1)}{10(5\sqrt{5} - 1)}$$

$\bar{x} = \bar{y} = 0$, pues la cápsula es simétrica respecto al eje Z.

- 2354** Hallar el momento de inercia de la parte de superficie lateral del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq h$) con respecto al eje OZ.

Desarrollo

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$I_z = \iint_R (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx$$

$$z = h \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = h^2$$

$$I_z = \iint_R (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dy dx = \sqrt{2} \iint_R (x^2 + y^2) dy dx$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow dx dy = r dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
 I_z &= \sqrt{2} \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \sqrt{2} \iint_R r^2 \cdot r dr d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h r^3 dr \right) d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} r^4 \Big|_0^h d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4} h^4 \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2} h^4 \pi}{2}
 \end{aligned}$$

2355 Valiéndose de la fórmula de STOCKES, transformar las integrales:

a) $\oint_C (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz$ b) $\oint_C y dx + z dy + x dz$

Desarrollo

$$\begin{cases} P = x^2 - yz \\ Q = y^2 - yz \\ R = z^2 - xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, & \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, & \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

a) $\oint_C (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS \\
 &= \iint_S (0 \cos \alpha + 0 \cos \beta + 0 \cos \gamma) dS = 0
 \end{aligned}$$

b) $\begin{cases} P = y \\ Q = z \\ R = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = 0, & \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0, & \frac{\partial R}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, & \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -1 \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \end{cases}$

$$\oint_C y dx + z dy + x dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

$$= - \iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS$$

Aplicando la fórmula de STOCKES, hallar las integrales que se dan a continuación y comprobar los resultados, calculándolas directamente.

2356 $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, donde C es la circunferencia

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0$$

Desarrollo

$$\begin{cases} P = y + z \\ Q = z + x \\ R = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 - 1 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 1 - 1 = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

$$= \iint_S (0 \cos \alpha + 0 \cos \beta + 0 \cos \gamma) dS = \iint_S 0 \cdot dS = 0$$

2357 $\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, donde C es la elipse $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$

Desarrollo

Según el teorema de Stockes:
$$\iint_D n \cdot \text{rot}(f) dS = \oint_C f \cdot dr \quad \dots (*)$$

como $n dS = dS = r_u \times r_v du dv$ expresamos (*) como
$$\iint_D r_u \times r_v \cdot \text{rot} f du dv$$

tomada sobre la región D sobre el plano uv

$f(y-x, z-x, x-y)$ expresado como vector, tomado sobre el plano $x + z = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que es D.

Si las ecuaciones del plano se toman como
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u \end{cases}$$
 la normal positiva n tiene

la dirección de $r_u \times r_v = [1, 0, -1] \times [0, 1, 1] = [1, 0, 1]$

Donde $r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ y el elemento de área vectorial

es: $n \cdot dS = r_u \times r_v du dv = [1, 0, 1] dx dy$

ahora él $\text{rot}(f) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$

$$= (-1 - 1, -1 - 1, -1 - 1) = (-2, -2, -2)$$

Luego
$$\iint_D n \cdot \text{rot}(f) dS = \iint_D [1, 0, 1] \cdot [-2, -2, -2] dx dy = -4 \iint_D dx dy$$

pero D es el área de la circunferencia de radio 1 entonces

$$\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = -4 \iint_D dx dy = -4(\pi r^2) = |-4\pi| = 4\pi$$

2358 $\oint_C x dx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$, donde C es la curva $x = a \sin t$, $y = a \cos t$,

$$z = a(\sin t + \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Desarrollo

$$\vec{\alpha}(t) = (a \sin t, a \cos t, a(\sin t + \cos t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\oint_C x dx + (x+y)dy + (x+y+z)dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} [a \sin t(a \cos t) + a(\sin t + \cos t)(-a \sin t) + 2a(\sin t + \cos t)a(\cos t - \sin t)]dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} [\sin t \cos t - \sin^2 t - \sin t \cos t + 2(\cos^2 t - \sin^2 t)]dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (-3\sin^2 t + 2\cos^2 t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{3(1-\cos 2t)}{2} + 1 + \cos 2t\right]dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos 2t\right)dt = -\pi a^2$$

2359 $\oint_{ABCA} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, donde ABCA es el contorno del ΔABC con los

vértices en los puntos A(a,0,0), B(0,a,0) y C(0,0,a)

Desarrollo

$$\overline{AB} = \{A + (B - A)t / 0 \leq t \leq 1\} = \{(a - at, at, 0) / 0 \leq t \leq 1\}$$

$$\oint_{\overline{AB}} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz =$$

$$= \int_0^1 [a^2 t^2 (-a dt + 0)] = -\frac{a^3}{3}$$

$$\overline{BC} = \{B + (C - B)t / 0 \leq t \leq 1\}$$

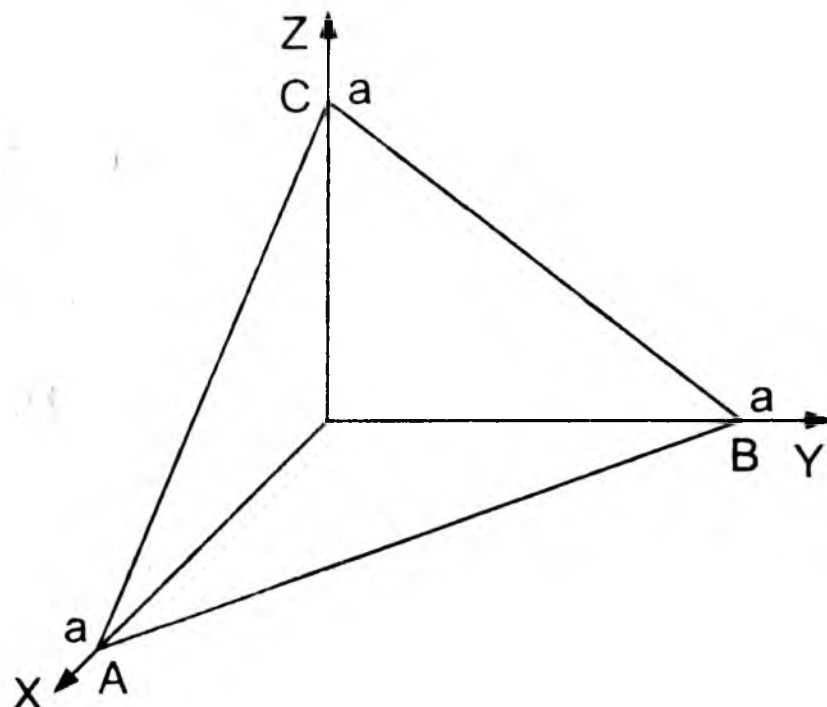
$$= \{(0, a - at, at) / 0 \leq t \leq 1\}$$

$$\oint_{\overline{BC}} (0 + a^2 t^2 (-a dt) + 0) = -\frac{a^3}{3}$$

$$\overline{CA} = \{C + (A - C)t / 0 \leq t \leq 1\} = \{(at, 0, a - at) / 0 \leq t \leq 1\}$$

$$\oint_{\overline{CA}} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = -a^3 \int_0^1 t^2 dt = -\frac{a^3}{3}$$

$$\oint_{ABCA} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = -\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3} = -a^3$$



2360 ¿En qué caso la integral curvilínea $I = \oint_C P dx + Q dy + R dz$ será igual a cero, para cualquier contorno C?

Desarrollo

\forall curva cerrada C se tiene $I = 0$ entonces

$P dx + Q dy + R dz$ es una diferencial exacta

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \wedge \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} I = \oint_C P dx + Q dy + R dz &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS \\ &= \iint_S (0 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \cos \beta + 0 \cdot \cos \gamma) dS = \iint_S 0 \cdot dS = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore I = \oint_C P dx + Q dy + R dz = 0$$

7.11. FÓRMULA DE OSTROGRADSKI – GAUSS.-

Si S es una superficie regular cerrada, que limita un volumen V y $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ y $R = R(x,y,z)$ son funciones continuas, junto con sus derivadas parciales de 1er orden en el recinto cerrado V , se verifica la fórmula de Ostrogradski – Gauss.

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

donde $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, son los cósenos directores de la normal exterior a la superficie S valiéndose de la fórmula de Ostrogradski – Gauss, transformar las siguientes integrales de superficie, sobre la superficie cerrada S , que limitan el volumen V (donde $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ son los cósenos directores de la normal exterior a la superficie S).

$$2361 \quad \iint_S xy \, dx \, dy + yz \, dy \, dz + zx \, dz \, dx$$

Desarrollo

$$\iint_S xy \, dx \, dy + yz \, dy \, dz + zx \, dz \, dx = \iint_S yz \, dy \, dz + zx \, dz \, dx + xy \, dx \, dy$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(zx) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) \right] dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint_V (0 + 0 + 0) dx \, dy \, dz = 0$$

$$\therefore \iint_S xy \, dx \, dy + yz \, dy \, dz + zx \, dz \, dx = 0$$

$$2362 \quad \iint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$$

Desarrollo

$$\iint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} y^2 + \frac{\partial}{\partial z} z^2 \right] dx \, dy \, dz$$

$$= 2 \iiint_V (x + y + z) dx \, dy \, dz$$

$$2363 \quad \iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$$

Desarrollo

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_V \frac{2 dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

2364 $\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS$

Desarrollo

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{\partial u}{\partial x} \\ Q = \frac{\partial u}{\partial y} \\ R = \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz$$

Valiéndose de la formula de Ostrogradski – Gauss, calcular las siguientes integrales de superficies.

2365 $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, donde S es la cara exterior de la superficie del

cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$

Desarrollo

$$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \iiint_V (2x + 2y + 2z) dx dy dz$$

$$= 2 \int_0^a \left(\int_0^a \left(\int_0^a (x + y + z) dz \right) dy \right) dx = 2 \int_0^a \left(\int_0^a \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right] \Big|_0^a dy \right) dx$$

$$= 2 \int_0^a \left(\int_0^a \left[(x + y)a + \frac{a^2}{2} \right] dy \right) dx = 2 \int_0^a \left(axy + \frac{ay^2}{2} + \frac{a^2}{2} y \right) \Big|_0^a dx$$

$$= 2 \int_0^a (a^2 x + a^3) dx = 2a^2 \left(\frac{x^2}{2} + ax \right) \Big|_0^a = 2a^2 \left(\frac{3a^2}{2} \right) = 3a^4$$

2366 $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, donde S es la cara exterior de la pirámide

limitada por la superficie $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 \iint_S (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy) &= \iiint_V (1+1+1) \, dx \, dy \, dz \\
 &= 3 \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} dz \right) dy \right) dx = 3 \int_0^a \left(\int_0^{a-x} (a-x-y) dy \right) dx \\
 &= 3 \int_0^a \left[(a-x)y - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^{a-x} dx = 3 \int_0^a \frac{(a-x)^2}{2} dx = -3(a-x)^3 \Big|_0^a \\
 &= -\frac{1}{3}[0 - a^3] = \frac{a^3}{3}
 \end{aligned}$$

2367 $\iint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy$, donde S es la cara exterior de la esfera
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 \iint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^a \rho^4 \sin \phi \, d\rho \right) d\phi \right) d\theta = \frac{3}{5} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \frac{\rho^5 \sin \phi}{5} \Big|_0^a d\phi \right) d\theta \\
 &= \frac{3a^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \right) d\theta = \frac{3a^5}{5} \int_0^{2\pi} -\cos \phi \Big|_0^\pi d\theta \\
 &= -\frac{3a^5}{5} \int_0^{2\pi} (-1-1) d\theta = \frac{6a^5}{5} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{12}{5} a^5 \pi
 \end{aligned}$$

2368 $\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS$, donde S es la superficie exterior total
 del cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $0 \leq z \leq b$

Desarrollo

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \iiint_V (2x + 2y + 2z) dx dy dz$$

pasando a coordenadas cilíndricas

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z^2 = \frac{b^2 r^2}{a^2}$$

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left(\int_0^{\frac{br}{a}} r^2 \left(\cos \theta + \sin \theta + \frac{z}{r} \right) dz dr d\theta \right) \right)$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left[r(\cos \theta + \sin \theta) + \frac{z^2}{2} \right] r \frac{br}{a} dr d\theta \right)$$

$$= \frac{2b}{a} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left((\cos \theta + \sin \theta) r^3 + \frac{br^3}{2a} \right) dr d\theta \right)$$

$$= \frac{2b}{a} \int_0^{2\pi} \left[(\cos \theta + \sin \theta) \frac{a^4}{4} + \frac{a^4 b}{8a} \right] d\theta$$

$$= \frac{2b}{a} \left[(\sin \theta - \cos \theta) \frac{a^4}{4} + \frac{a^3 b \theta}{8} \right] \Big|_0^{2\pi}$$

$$\therefore \iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \frac{a^2 b^2 \pi}{2}$$

2369 Demostrar, que si es una superficie cerrada y ℓ cualquier dirección constante

$$\iint_S \cos(n, \ell) dS = 0 \text{ donde } n \text{ es la normal exterior a la superficie } S.$$

Desarrollo

Como P, Q, R son constantes $\ell =$ dirección constante

$$\begin{aligned}\iint_S \cos(n, \ell) dS &= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V (0 + 0 + 0) dx dy dz \\ &= \iiint_V 0 \cdot dx dy dz = 0\end{aligned}$$

370 Demostrar, que el volumen V , limitado por la superficie S , es igual a

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \text{ donde } \cos \alpha, \cos \beta \text{ y } \cos \gamma \text{ son los}$$

cósenos directores de la normal exterior a la superficie S .

Desarrollo

$$\begin{cases} P = \frac{x}{3} \\ Q = \frac{y}{3} \\ R = \frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{3} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{3} \\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$$

$$= \frac{1}{3} \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \right) dx dy dz = \frac{1}{3} \iiint_V (1 + 1 + 1) dx dy dz$$

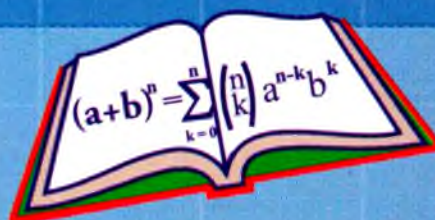
$$= \frac{1}{3} \iiint_V 3 dx dy dz = \iiint_V dx dy dz$$

$$\therefore V = \iiint_V dx dy dz = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$$



Eduardo Espinoza Ramos
Graduado y Titulado en Matemática Pura.
Catedrático de las principales
Universidades de la Capital

OBRAS PUBLICADAS



EDITORIAL

EDUARDO ESPINOZA RAMOS